مفاهیم پایه ای
و
فرمول های مثلثات

(قابل استفاده برای دانش آموزان کنکوری تجربی و ریاضی فیزیک)

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- تمرین‌های برای آمادگی

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث «**مفاهیم پایه ای و فرمول های مثلثات**» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

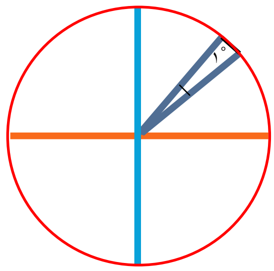
در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

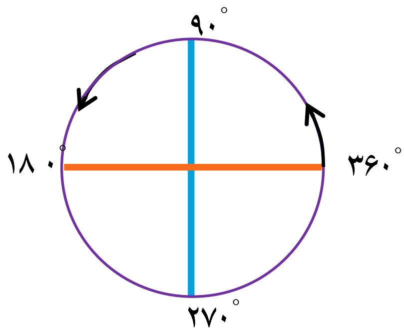
حبیب هاشمی

درس اول : واحد های اندازه گیری زاویه

تعریف درجه :

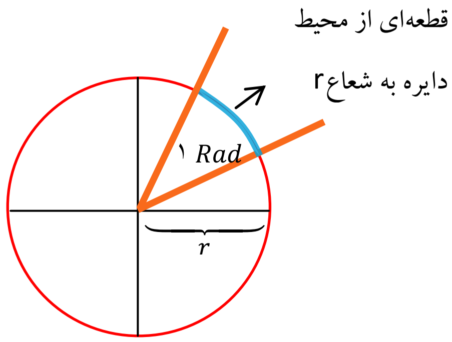
اگر محیط دایره را به ۳۶۰° قسمت مساوی تقسیم کنیم زاویه‌ی مرکزی‌ای که $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره را در خود جای می‌دهد را یک درجه گوئیم

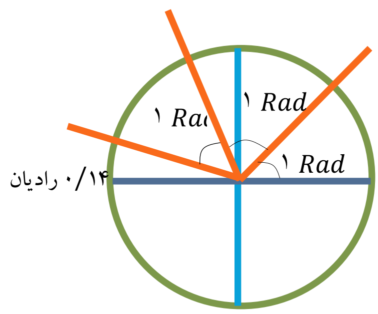




۲-۱-۱تعریف رادیان :

زاویه‌ی مرکزی روبرو به قطعه‌ای از محیط دایره به اندازه شعاع (r)را یک رادیان می-گوئیم.





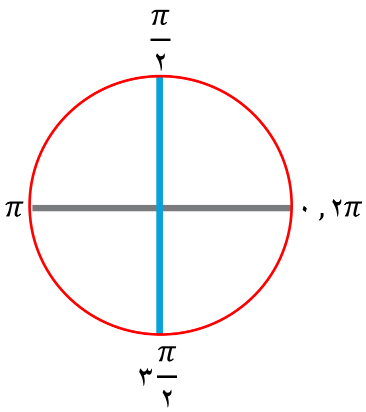
رادیان π = نصف دور دایره $\longrightarrow$ رادیان ۳/۱۴ = نصف دور دایره

رادیان ۲π = یک دور کامل دایره $\longrightarrow$ رادیان ۶/۲۸ = یک دور کامل دایره

۱۸۰° درجه معادل π رادیان است (یعنی π با ۱۸۰° برابرنیست بلکه π همیشه ۳/۱۴ است یعنی اگر ۳/۱۴ دایره را طی کنیم مانند این است که ۱۸۰° درجه را طی کرده‌ایم)

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\xRightarrow{R=۱}\frac{D}{۱۸۰}=\frac{۱}{\pi}\longrightarrow D=\frac{۱۸۰}{\pi}=\frac{۱۸۰}{۳/۱۴}=۵۷/۳$$

یعنی یک رادیان تقریباً برابر ۵۷/۳ درجه است .



۲-ازوایای مهم

$$\pi\longrightarrow ۱۸۰^\circ$$
$$\frac{\pi}{۲}\longrightarrow ۹۰^\circ$$

$$\frac{\pi}{۳}\longrightarrow ٦۰^\circ$$
$$\frac{\pi}{٤}\longrightarrow ٤٥^\circ$$
$$\frac{\pi}{٦}\longrightarrow ۳۰^\circ$$

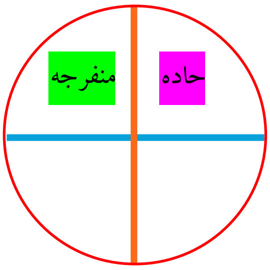
تبدیل رادیان به درجه :

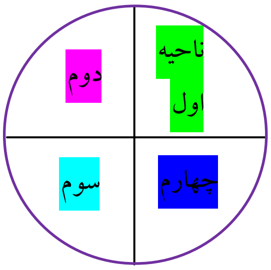
$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{\pi}{۶}\xrightarrow{\frac{\pi}{۱۲}}۱۵^\circ$$
$$\frac{۱}{۴}\cdot\frac{\pi}{۶}\xrightarrow{\frac{\pi}{۲۴}}۷/۵^\circ$$
$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{\frac{\pi}{۸}}۲۲/۵^\circ$$
$$\frac{۱}{۳}\cdot\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{\frac{\pi}{۹}}۲۰^\circ$$

$$۵\frac{\pi}{۶}\longrightarrow ۱۵۰^\circ$$
$$۷\frac{\pi}{۳}\longrightarrow ۴۲۰^\circ$$
$$۳\frac{\pi}{۲}\longrightarrow ۲۷۰^\circ$$
$$۲\pi\longrightarrow ۳۶۰^\circ$$
$$۵\frac{\pi}{۴}\longrightarrow ۲۲۵^\circ$$

تبدیل درجه به رادیان :

$$۱۵۰^\circ \longrightarrow ۵\frac{\pi}{۶}$$
$$۲۱۰^\circ \longrightarrow ۷\frac{\pi}{۶}$$
$$۱۳۵^\circ \longrightarrow ۳\frac{\pi}{۴}$$
$$۲۴۰^\circ \longrightarrow ۴\frac{\pi}{۳}$$
$$۲۴۰^\circ \longrightarrow ۸\frac{\pi}{۶} = ۴\frac{\pi}{۳}$$
$$۱۵^\circ \longrightarrow \frac{۱}{۲}\cdot\frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۱۲}$$
$$۲۷۰^\circ \longrightarrow ۳\frac{\pi}{۲}$$

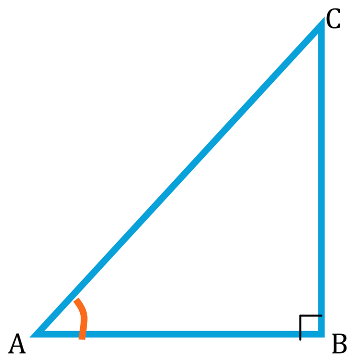




درس دوم: نسبت های مثلثاتی

در مثلث قائم الزاویهٔ ABC برای زاویهٔ معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ A، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می نامیم و آن را با tanA نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم الزاویهٔ ABC، داریم.

$$\boxed{\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}}$$



عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می نامیم و آن را با cotA نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم الزویه ABC داریم:

$$\boxed{\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}}$$

در هر مثلث قائم الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حادهٔ A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن را سینوس زاویهٔ A می نامیم و با sinA نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\boxed{\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{BC}{AC}}$$

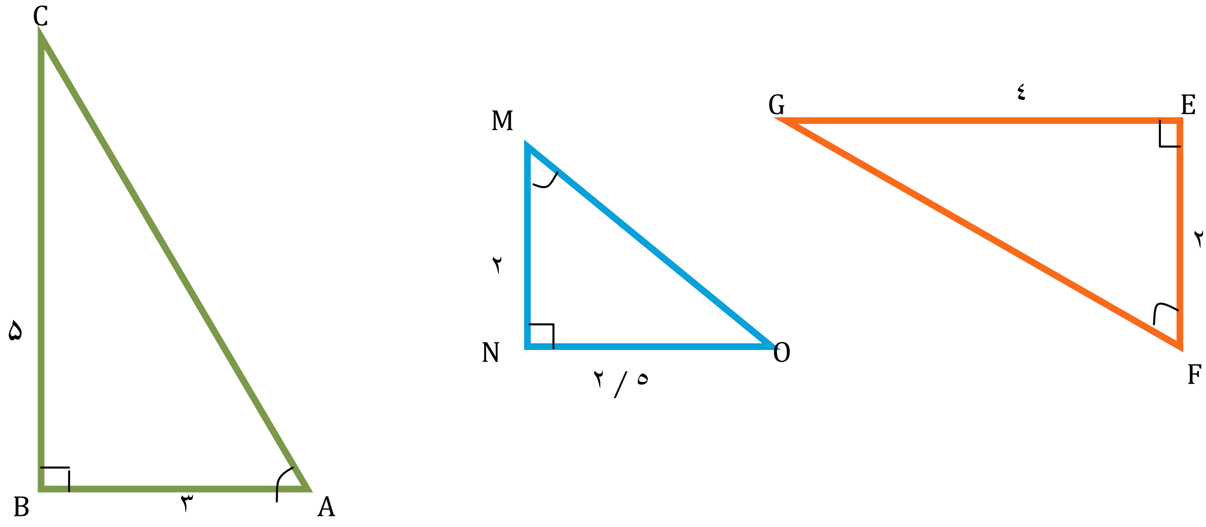
همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویهٔ A می نامیم و آن را با $\cos A$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\boxed{\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{AC}}$$

در یک مثلث قائم الزاویهٔ، نسبت های سینوس ، کسینوس ، تانژانت و کتانژانت را **نسبت های مثلثاتی** می نامیم.

نکته: به سادگی میتوان دید در مثلث قائم الزاویهٔ ABC، $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ و از این رو $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$. به طور مشابه، می توان دید $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

مثال: در هر یک از شکل های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳} \qquad \cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{۲}{۲ / ۵} \qquad \tan G = \frac{EF}{GE} = \frac{۲}{۴}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵} \qquad \tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{۲ / ۵}{۲} \qquad \cot G = \frac{GE}{EF} = \frac{٤}{۲}$$

مثال: در شکل مقابل نسبتهای مثلثاتی زوایای αوβ را بدست آورید.

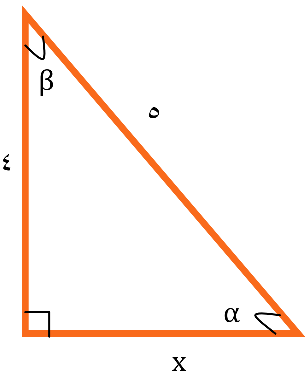
رابطه فیثاغورس$۵^۲ = ۴^۲ + x^۲ \to ۲۵ = ۱۶ + x^۲ \to x^۲ = ۹ \to x = ۳$

$sin\alpha = \frac{۴}{۵}$ $\qquad$ $sin\beta = \frac{۳}{۵}$

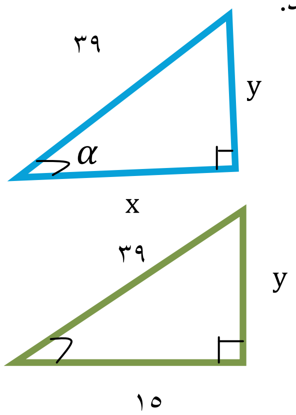
$cos\alpha = \frac{۳}{۵}$ $\qquad$ $cos\beta = \frac{۴}{۵}$

$\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ $\qquad$ $\tan\beta = \frac{۳}{۴}$

$\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$ $\qquad$ $\cot = \frac{۴}{۳}$



مثال: طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۳۹ و کسینوس یکی از زاویه های حاده ی آن $\frac{۵}{۱۳}$باشد محیط مثلث را بدست آورید.



$cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$

$cos\alpha = \frac{x}{۳۹} \to \frac{۵}{۱۳} = \frac{x}{۳۹} \to x = ۱۵$

$sin\alpha = \frac{y}{۳۹} \to (۳۹)^۲ = ۱۵^۲ + y^۲ \to$

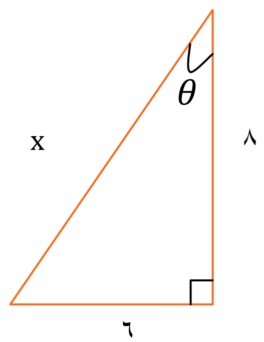
مثال: در هر مثلث نسبتهای مثلثاتی زاویه ی θ را بدست آورید.

الف) $x^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ \to x^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \to x = ۱۰$ رابطه ی فیثاغورس

$sin\theta = \frac{۶}{۱۰}$

$cos\theta = \frac{۸}{۱۰}$

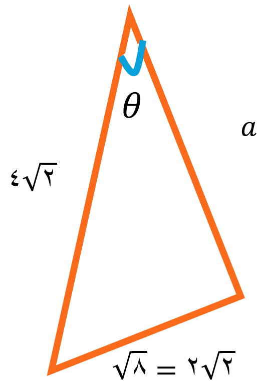
$tan\theta = \frac{۶}{۸}$



$cot\theta = \frac{۸}{۶}$

ب) رابطه ی فیثاغورس $\left(۴\sqrt{۲}\right)^{۲} = \left(\sqrt{۸}\right)^{۲} + a^{۲}$

$۳۲ = ۸ + a^{۲} \to a^{۲} = ۲۴ \to a = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$



$sin\theta = \frac{\sqrt{۸}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲}$

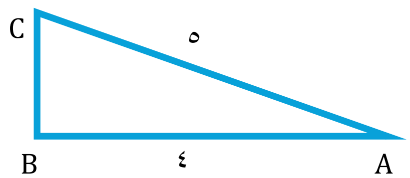
$cos\theta = \frac{۲\sqrt{۶}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۱\sqrt{۳}}{۲}$

$tan\theta = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۶}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$cot\theta = \frac{۲\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}} = \sqrt{۳}$

مثال: در مثلث قائم الزاویهٔ ABC $\left(\hat{B} = ۹۰^{\circ}\right)$, $AB = ۴$ و $AC = ۵$ می باشند. مقدار $tanA$ و $cotA$ را بدست آورید.

پاسخ: با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع BC را بدست می آوریم:



$\mathrm{BC}^{۲} = \mathrm{AC}^{۲} - \mathrm{AB}^{۲} = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Longrightarrow \mathrm{BC} = ۳$

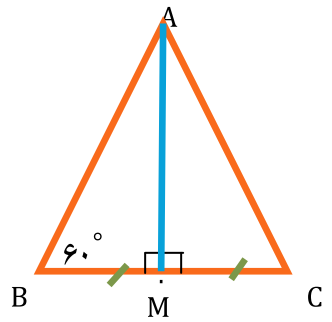
$\Longrightarrow tanA = \frac{BC}{AB} = \frac{۳}{۴}, cotA = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۳}$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ ، نسبت های مثلثاتی ۳۰° و ۶۰° را به دست آورید.

حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمساز زاویهٔ A رارسم می کنیم .(AM).

AM بر BC عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: $BM = \frac{BC}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$

بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM، داریم:



$$\mathrm{AM}^۲ = \mathrm{AB}^۲ - \mathrm{BM}^۲ = (۲)^۲ - (۱)^۲ = ۴ - ۱ = ۳$$

$$\Longrightarrow AM = \sqrt{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم الزاویهٔ ABM:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AM}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ °۶۰ در مثلث قائم الزاویهٔ ABM :

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

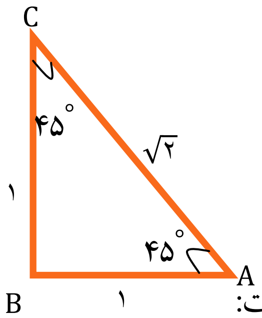
$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین با ضلع های قائمه به طول ۱ ، نسبت های مثلثاتی °۴۵ را به دست آورید.

حل) بنا بر قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{۲}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ A (یا c) در مثلث قائم الزاویهٔ ABC به صورت زیر است:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{۱}{۱} = ۱ , \cot ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

مقدار نسبت های مثلثاتی زوایای $۳۰^\circ , ۴۵^\circ$ و ۶۰°

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$Sin\ A$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$Cos\ A$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$Tan\ A$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$Cot\ A$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

مثال : مقدار عددی عبارت $۳sin۳۰^\circ + ۴\sqrt{۲}\cos۴۵^\circ - \sqrt{۳}\tan۶۰^\circ$ را بدست آورید.

پاسخ: با توجه به این که $sin۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}, cos۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $tan۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ می باشند، داریم:

$$۳sin۳۰^\circ + ٤\sqrt{۲}cos٤٥^\circ - \sqrt{۳}tan٦۰^\circ = ۳ \times \frac{۱}{۲} + ٤\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳} \times \sqrt{۳}$$

$$= \frac{۳}{۲} + ٤ - ۳ = \frac{۳}{۲} + ۱ = \frac{٥}{۲}$$

مثال : مقدار عددی عبارت $\sqrt{۲}cos۴۵^\circ + ۲\sqrt{۳}\sin۶۰^\circ + \sqrt{۳}\tan۳۰^\circ$ را بدست آورید.

$$\sqrt{۲}cos۴۵^\circ + ۲\sqrt{۳}\sin۶۰^\circ + \sqrt{۳}\tan۳۰^\circ$$

$$= \sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۲\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = ۱ + ۳ + ۱ = ۵$$

مثال : مقدار عددی عبارت $4\sqrt{2}\sin 45^\circ - 5\cot 45^\circ - 3\cos 60^\circ$ را بدست آورید.

$$4\sqrt{2}\sin 45^\circ - 5\cot 45^\circ - 3\cos 60^\circ$$

$$= 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 5(1) - 3\times\frac{1}{2} = 4 - 5 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{3}{2} = \frac{-5}{2}$$

مثال : مقدار عددی عبارت $8\sin 30^\circ + \sqrt{3}(\cot 60^\circ - \tan 60^\circ)$ را بدست آورید.

$$8\sin 30^\circ + \sqrt{3}(\cot 60^\circ + \tan 60^\circ)$$

$$= 8\times\frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right) = 4 + \sqrt{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3} = 4 + 4 = 8$$

مثال : مقدار عددی عبارت $-\sin 60^\circ + 2\cos 30^\circ - 4\cot 30^\circ + 2\tan 45^\circ$ را بدست آورید.

$$-\sin 60^\circ + 2\cos 30^\circ - 4\cot 30^\circ + 2\tan 45^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\times\sqrt{3} + 2(1)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} + 2 = \frac{-\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{-7\sqrt{3}}{2} + 2$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.(زوایای داده شده بر حسب درجه هستند.)

$$1)\sin 45\cos 45 + \sin 60\cos 30 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$2)2\sin 30 + \cos^2 45 - \sin^2 60 = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{4+2-3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{a\sin^m\theta = a(\sin\theta)^m}$$

$$3)\ \tan 30\cot 30 + \sin^2 30 + \cos^2 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$4)\ \sqrt{3}\tan 60 - \frac{\tan 30}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\times\sqrt{3} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{1}} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$5)\ 1 - 2\sin^4 30 + \frac{\cos^2 30}{2} = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = 1 - 2\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{\frac{3}{4}}{2} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$1)\ \ 2\tan 30\cot 30 - 3\cot 45\tan 45$

$2)\ \ (\cos 30 - \sin 45)(\sin 60 + \cos 45)$

$3)\ \ \dfrac{1 + \tan 60 + \tan^2 60}{1 + \cot 60 + \tan^2 60}$

مثال: درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$1)\ 2\sin 30\cos 30 = \sin 60 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2)\ 1 + \tan^2 60 = \frac{1}{\cos^2 60} \to 1 + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \to 1 + 3 = \frac{1}{\frac{1}{4}} \to 4 = 4$$

تمرین: درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$1)\sin 45\cos 45 = \sin 30$

$2)\sin^2 60 + \cos^2 60 = 1$

$3)\dfrac{\sin^2 45}{2} = \sin^2 30$

مثال : در مثلث قائم الزاویهٔ ABC $AB = ۴, \hat{B} = ۹۰^{\circ}$ و $BC = ۶$ می باشد، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(cosA + sinC)(cosA - sinC)$

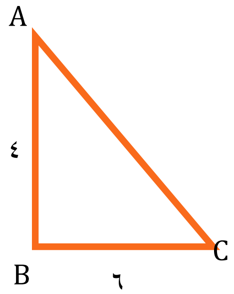
ب) $\tan A(tanC + cotC)$

حل) مطابق شکل و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر AC را به دست می آوریم:

$$\mathrm{AC}^۲ = \mathrm{AB}^۲ + \mathrm{BC}^۲ = ۱۶ + ۳۶ = ۵۲$$

$$\Longrightarrow AC = \sqrt{۵۲}$$

الف)



$$\cos\mathrm{A} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{٤}{\sqrt{۵۲}} \quad , sinC = \frac{AB}{AC} = \frac{۴}{\sqrt{۵۲}}$$

$$(\cos\mathrm{A} + \sin\mathrm{C})(\cos\mathrm{A} - \sin\mathrm{C}) = (\cos\mathrm{A})^۲ - (\sin\mathrm{C})^۲$$

$$= \frac{۱۶}{۵۲} - \frac{۱۶}{۵۲} = ۰$$

ب)

$$\tan\mathrm{A} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{٦}{٤} = \frac{۳}{۲} \quad , \qquad \tan\mathrm{C} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{٤}{٦} = \frac{۲}{۳}$$

$$\cot\mathrm{C} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{٦}{٤} = \frac{۳}{۲}$$

$$tanA\ (tanC + cotC) = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۲}\right) = \frac{۳}{۲} \times \left(\frac{۴ + ۹}{۶}\right) = \frac{۱۳}{۴}$$

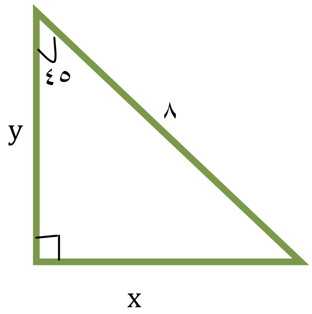
مثال: در هرشکل مقادیر مجهول را بدست آورید.

الف) $sin۴۵^\circ = \frac{x}{۸}$

$\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{x}{۸} \rightarrow x = ۴\sqrt{۲}$

$cos۴۵^\circ = \frac{y}{۸}$

$\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{y}{۸} \rightarrow y = ۴\sqrt{۲}$

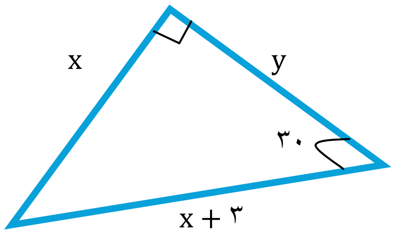


ب) $sin۳۰^\circ = \frac{x}{x+۳}$

$\frac{۱}{۲} = \frac{x}{x+۳} \rightarrow ۲x = x + ۳ \rightarrow x = ۳$

فیثاغورس $y^۲ = ۳^۲ + ۶^۲$

$y^۲ = ۹ + ۳۶ \rightarrow y^۲ = ۴۵ \rightarrow y = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$



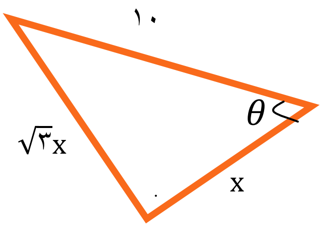
پ) $tan\theta = \frac{\sqrt{۳}x}{x} = \sqrt{۳}$

$\Longrightarrow \theta = ۶۰^\circ$

$cos\theta = \frac{x}{۱۰}$

$cos۶۰^\circ = \frac{x}{۱۰}$

$\frac{۱}{۲} = \frac{x}{۱۰} \rightarrow x = ۵$



ت) در مثلث قائم الزاویه بزرگ $sin۶۰^\circ = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{t} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{t} \Longrightarrow t = ۳۰$

رابطه فیثاغورس مثلث قائم الزاویه بزرگ $\Longrightarrow t^۲ = (۱۵\sqrt{۳})^۲ + x^۲$

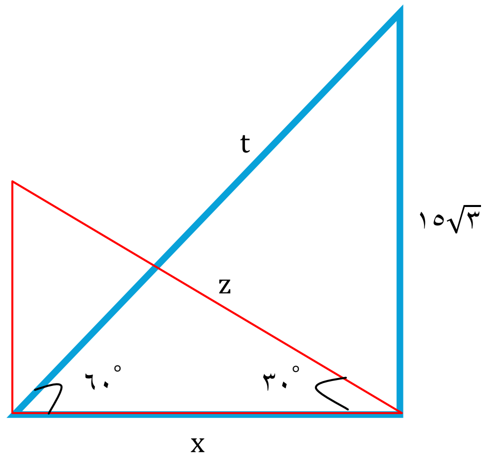
$\Longrightarrow ۳۰^۲ = ۶\sqrt{۵} + x^۲$

$۹۰۰ - ۶\sqrt{۵} = x^۲ \Longrightarrow ۲۲۵ = x^۲ \Longrightarrow ۱۵ = x$

در مثلث قائم الزاویه کوچک $cos۳۰^\circ = \frac{x}{z}$

$\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۵}{z} \to z = \frac{۳۰}{\sqrt{۳}} = \theta۱۰\sqrt{۳}$

$sin۳۰^\circ = \frac{y}{z} \to \frac{۱}{۲} = \frac{y}{۱۰\sqrt{۳}} \to y = ۵\sqrt{۳}$



ث) $sin۵۳^\circ = cos۳۷^\circ$ $\qquad sin۳۷ = ۰/۶ \ ,cos۳۷ = ۰/۸$

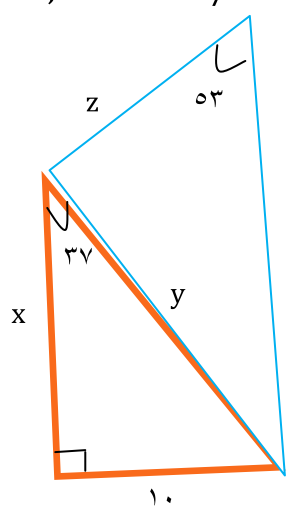
$sin۵۳^\circ = \frac{y}{z} \Longrightarrow ۰/۸ = \frac{۱۰}{\frac{y}{z}} \to z = \frac{۱۰}{\frac{y}{۸}} \times ۱۰$

$z = \frac{۱۰۰}{y}$

$sin۳۷^\circ = \frac{۱۰}{y}$

$۰/۶ = \frac{۱۰}{y} \to y = \frac{۱۰۰}{۶}$

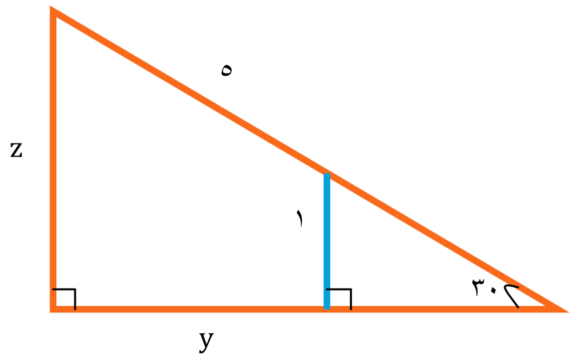
$cos۳۷^\circ = \frac{x}{y} \quad ,۰/۸ = \frac{۸}{\frac{۱۰۰}{۶}} \to x = \frac{۸\times\frac{۱۰۰}{۶}}{۱۰} = \frac{۸۰}{۶}$



ج) در مثلث کوچک $tan۳۰^\circ = \frac{۱}{x} \to \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱}{x} \to x = \frac{۳}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$

در مثلث بزرگ $sin۳۰^\circ = \frac{z}{۵} \to \frac{۱}{۲} = \frac{z}{۵} \to z = \frac{۵}{۲}$

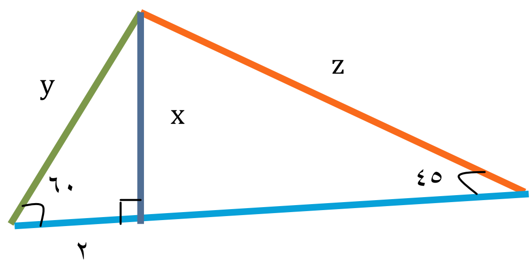
در مثلث بزرگ $cos۳۰^\circ = \frac{x+y}{۵} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}+y}{۵} \to ۵\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} + ۲y \to \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} = y$



ج) در مثلث قائم الزاویه کوچک $cos۶۰^\circ = \frac{۲}{y} \to \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{y} \to y = ۴$

در مثلث قائم الزاویه کوچک $sin۶۰^\circ = \frac{x}{y} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{x}{۴} \to x = ۲\sqrt{۳}$

در مثلث بزرگ $sin۴۵^\circ = \frac{x}{z} \to \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{z} \to z = \frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$



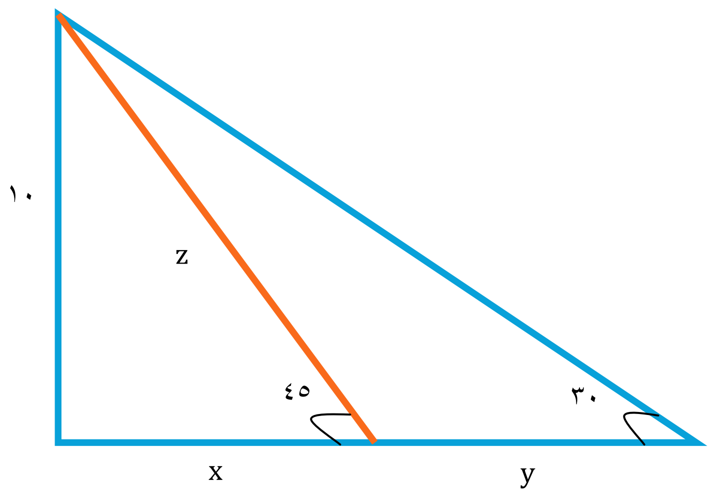
ح) در مثلث قائم الزاویه کوچک $\Longrightarrow sin۴۵^\circ = \frac{۱۰}{z}$

$\Longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱۰}{z} \to z = \frac{۳۰}{\sqrt{۲}} = ۱۰\sqrt{۲}$

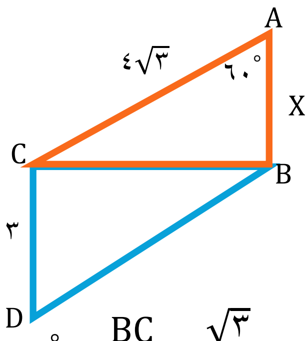
در مثلث قائم الزاویه کوچک $\cos ۴۵ = \frac{x}{z} \to \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{x}{۱۰\sqrt{۲}} \to x = ۱۰$

در مثلث قائم الزاویه بزرگ $\tan ۳۰^{\circ} = \frac{۱۰}{x+y} \to \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۰}{۱۰+y}$

$$\Longrightarrow ۱۰\sqrt{۳} + \sqrt{۳}y = ۳۰ \to y = \frac{۳۰ - ۱۰\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$$



مثال : در شکل رو به رو ، نسبت های مثلثاتی زاویهٔ D را به دست آورید.



حل) در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ، داریم:

$$\sin ٦۰^{\circ} = \frac{BC}{AC} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{٤\sqrt{۳}} \Longrightarrow BC = ٤\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ٦$$

در مثلث قائم الزاویهٔ BCD و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر BD را به دست می آوریم:

$$BD^{۲} = BC^{۲} + CD^{۲} = ٦^{۲} + ۳^{۲} = ۳٦ + ۹ = ٤٥$$

$$\Longrightarrow BD = \sqrt{۴۵} = \sqrt{۹ \times ۵} = ۳\sqrt{۵}$$

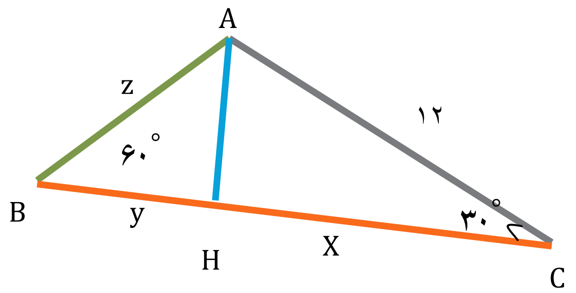
بنابراین:

$$\sin D=\frac{BC}{BD}=\frac{۶}{۳\sqrt{۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos D=\frac{CD}{BD}=\frac{۳}{۳\sqrt{۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\tan D=\frac{BC}{CD}=\frac{۶}{۳}=۲\,,\qquad \cot D=\frac{CD}{BC}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

مثال : در مثلث روبه رو، مقادیر y,x و Z را به دست آورید.



حل) در مثلث قائم الزاویهٔ ACH داریم:

$$\cos ۳۰^\circ=\frac{CH}{AC}\Longrightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{x}{۱۲}\Longrightarrow x=۱۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

حال برای به دست آوردن AHبه دو روش می توان عمل کرد:

روش اول: بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AH^۲=AC^۲-CH^۲=۱۲^۲-(۶\sqrt{۳})^۲$$

$$=۱۴۴-۱۰۸=۳۶\Longrightarrow AH=۶$$

$$\sin ۳۰^\circ=\frac{AH}{AC}\Longrightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{AH}{۱۲}\Longrightarrow AH=\frac{۱۲}{۲}=۶$$

در مثلث قائم الزاویهٔ ABH، داریم:

$$\sin ٦٠^\circ = \frac{AH}{AB} \Longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{٦}{z} \Longrightarrow \sqrt{۳}z = ١٢$$

$$\Longrightarrow z = \frac{۱۲}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{۳} = ۴\sqrt{۳}$$

از دو روش برای به دست آوردن y استفاده می کنیم:

روش اول:

$$BH^۲ = AB^۲ - AH^۲ = (٤\sqrt{۳})^۲ - ٦^۲ = ٤٨ - ٣٦ = ١٢$$

$$\Longrightarrow y = BH = \sqrt{۱۲} = \sqrt{۴ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$$

روش دوم:

$$\cos ٦٠^\circ = \frac{BH}{AB} \Longrightarrow \frac{١}{٢} = \frac{y}{٤\sqrt{۳}} \Longrightarrow y = \frac{٤\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$$

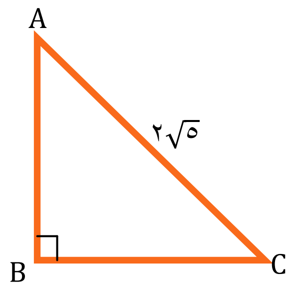
مثال : در مثلث قائم الزاویهٔ ABC, $B = ۹۰^\circ$ ؛ طول وتر $۲\sqrt{۵}$ و $\tan C = ۲$ می باشد.

الف) طول اضلاع قائم مثلث را به دست آورید .

ب) نسبت های مثلثاتی زاویهٔ A را به دست آورید .

حل الف) داریم:

$$\tan C = \frac{AB}{BC} = ۲ \Longrightarrow AB = ۲BC \quad (*)$$



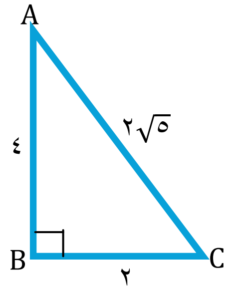
بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABCداریم:

$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} \xrightarrow{(*)} \left(۲\sqrt{۵}\right)^{۲} = (۲BC)^{۲} + BC^{۲}$$

$$\Rightarrow ۲۰ = ۴BC^{۲} + BC^{۲} \Rightarrow ۵BC^{۲} = ۲۰ \Rightarrow BC^{۲} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

$$\Rightarrow BC = ۲ \xrightarrow{(*)} AB = ۴$$

ب)



$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{۲}{۲\sqrt{۵}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{۴}{۲\sqrt{۵}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \ , \cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

مثال : در هر یک از قسمت های زیر، مقدار X را به دست آورید

الف) $x\cos ۶۰^{\circ} = \dfrac{\sqrt{۳}\tan ۳۰^{\circ} - ۴\sin ۳۰^{\circ}}{۲\sqrt{۲}\cos ۴۵^{\circ} + \tan ۴۵^{\circ}}$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم .

سپس با حل معادله، مقدار x را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{۳}\tan ۶۰^{\circ} - ۴\sin ۳۰^{\circ}}{۲\sqrt{۲}\cos ۴۵^{\circ} + \tan ۴۵^{\circ}} = \dfrac{\sqrt{۳} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} - ۴ \times \frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱} = \dfrac{۱ - ۲}{۲ + ۱} = \dfrac{-۱}{۳} \\ x\cos ۶۰^{\circ} = \dfrac{۱}{۲}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}x = \frac{-۱}{۳} \Rightarrow x = -\frac{۲}{۳}$$

$$\sin^{۲}۴۵^\circ = (\sin۴۵^\circ)^{۲} = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲} = \frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}{۲\times ۲} = \frac{۱}{۲}$$

ب) $۲۰ sinx = \dfrac{۲tan۳۰^\circ + cot۳۰^\circ}{\frac{۱}{۳}(cot۴۵^\circ - \sin^{۲}۴۵^\circ)}$, $۰^\circ < x < ۹۰^\circ$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم .

سپس با حل معادله، مقدار x را به دست می آوریم:

$$\sin^{۲}۴۵^\circ = (\sin ۴۵^\circ)^{۲} = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲} = \frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}{۲\times ۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲\tan۳۰^\circ + \cot۳۰^\circ}{\frac{۱}{۳}(\cot ۴۵^\circ - \sin^{۲}۴۵^\circ)} = \frac{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۳} + \sqrt{۳}}{\frac{۱}{۳}(۱-\frac{۱}{۲})} = \frac{\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}}{\frac{۱}{۶}} = ۱۰\sqrt{۳}$$

$$\Longrightarrow ۲۰\sin x = ۱۰\sqrt{۳} \Longrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰^\circ < x < ۹۰^\circ \Longrightarrow x = ۶۰^\circ$$

مثال : اگر $۹۰^\circ > \alpha > ۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید:

الف) $-۲sin\alpha + \sqrt{۳}\cot\alpha$

حل) چون $۹۰^\circ > \alpha > ۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است، بنابراین: $\alpha = ۳۰^\circ$

$$-۲sin\alpha + \sqrt{۳}\cot\alpha = -۲\sin۳۰^\circ + \sqrt{۳}\cot۳۰^\circ$$

$$= -۲\times\frac{۱}{۲} + \sqrt{۳}\times\sqrt{۳} = -۱ + ۳ = ۲$$

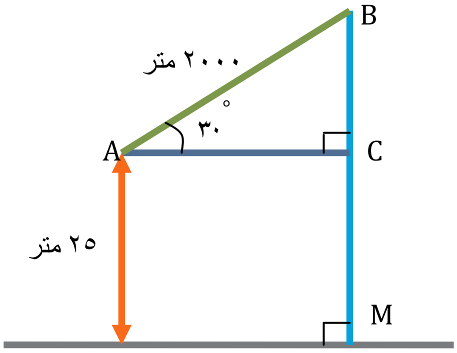
ب) $۴cos۲\alpha + \cot(\alpha + ۱۵^\circ)$

حل)

$$\text{٤}cos^{\text{٢}}\alpha + \tan(\alpha + \text{١٥}^\circ) = \text{٤}\cos^{\text{٢}}(\text{٣٠}^\circ) + \cot(\text{٣٠}^\circ + \text{١٥}^\circ)$$

$$= \text{۴}\cos \text{۶۰}^\circ + cot\ \text{۴۵}^\circ = \text{۴} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \text{١} = \text{٢} + \text{١} = \text{٣}$$

مثال : یک موشک در ارتفاع ۲۵ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ٣٠° پرتاب می شود. می خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟



حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می سازیم . با توجه به شکل زیر، به سادگی می توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با:

$$BC + MC = BC + \text{٢٥}$$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم . می دانیم $\sin \text{٣٠}^\circ = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$. پس در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$\sin\text{٣٠}^\circ = \frac{\text{١}}{\text{٢}} = \frac{BC}{\text{٢٠٠٠}} \Longrightarrow BC = \text{١٠٠٠}$$

و از این رو

$$\text{ارتفاع موشک} = \text{١٠٠٠} + \text{٢٥} = \text{١٠٢٥}$$

مثال : یک موشک از ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۶۰° پرتاب می شود. موشک پس از طی $۶۰۰\sqrt{۳}$ متر با همین زاویه، به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟

حل) شکل هندسی رو به رو را برای حل این مسأله در نظر می گیریم.

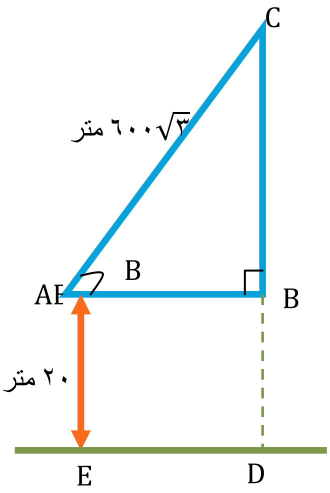
پس از طی $۶۰۰\sqrt{۳}$ متر، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر $\mathrm{DB} + \mathrm{BC}$ است. داریم:

$$\overset{\Delta}{\mathrm{ABC}} : \widehat{\mathrm{B}} = ۹۰ \Longrightarrow \sin ۶۰^{\circ} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$$

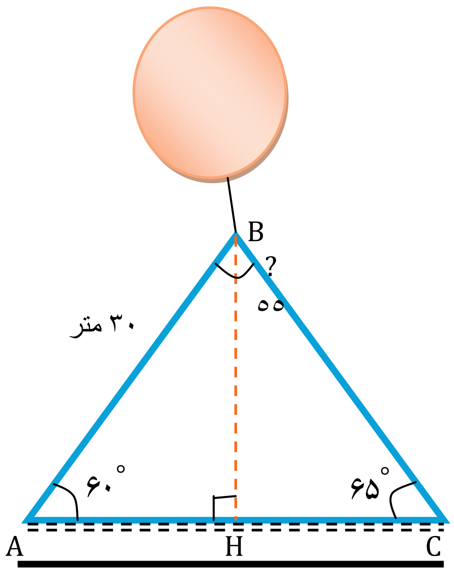
$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۶۰۰\sqrt{۳}} \Longrightarrow \mathrm{BC} = ۶۰۰\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۹۰۰$$

$$\mathrm{DB} = \mathrm{AE} = ۲۰$$

$$\Longrightarrow DC = DB + BC = ۲۰ + ۹۰۰ = ۹۲۰$$



مثال : در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب ها ۳۰ متر است. طول طناب دوم را پیدا کنید؟ $sin ۶۵^{\circ} = ۰ / ۹$



حل) ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می کنیم و آن را BH می نامیم.

سپس طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به دست می آوریم.

$$\sin ٦٠^\circ = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}} \rightarrow \mathrm{BH} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٣٠ = ١٥\sqrt{٣}$$

اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ °۶۵، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$\overset{\Delta}{\mathrm{BHC}} \rightarrow \sin ٦٥^\circ = \frac{BH}{BC} \rightarrow BC = \frac{BH}{\sin ٦٥} = \frac{١٥\sqrt{٣}}{٠/٩} \cong ٢٨/٨٦$$

مثال: در یک جاده کوهستانی مشابه شکل زیر، طول جاده سرپائینی ۱۲ m و زاویه جاده ی سربالایی و سرپائینی با سطح زمین به ترتیب °۴۵, °۳۰ است:

الف) ارتفاع قله را بدست آورید.

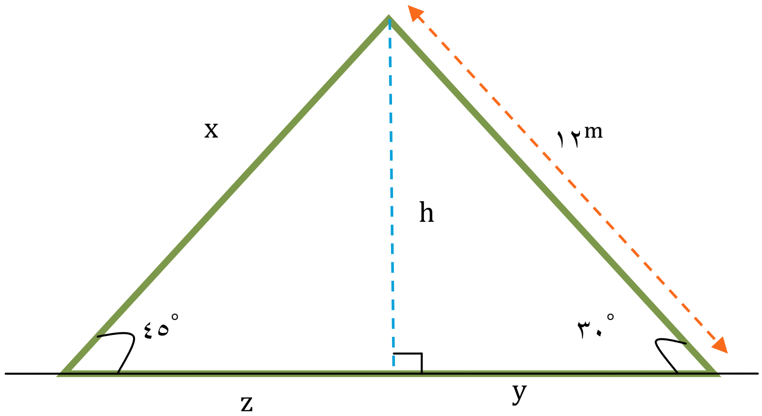
ب) طول جاده سربالایی را بدست آورید.

پ) طول تونل احداث شده بین دو نقطه ی A و B چقدر است؟

الف) $sin۳۰^\circ = \frac{h}{۱۲} \rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h}{۱۲} \rightarrow h = ۶$

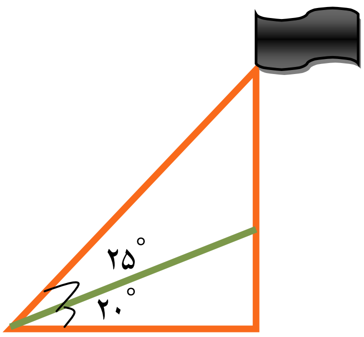
ب) $sin۴۵^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۶}{x} \rightarrow x = \frac{۱۲}{\sqrt{x}} =$ گویا $۶\sqrt{۲}$

ج) $\begin{cases} cos۳۰^\circ = \frac{y}{۱۲} \rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{y}{۱۲} \rightarrow y = ۶\sqrt{۳} \\ cos۴۵^\circ = \frac{z}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{z}{۶\sqrt{۲}} \rightarrow z = ۶ \end{cases}$ طول تونل $= y + z = ۶\sqrt{۳} + ۶$

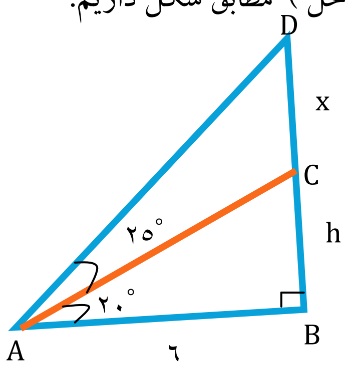


مثال : مطابق شکل، شخصی در فاصلهٔ ۶ متری ستونی ایستاده که بر بالای آن میلهٔ پرچمی نصب شده است.

طول میله را با فرض $tan۲۰^\circ = ۰ / ۳۶$ به دست آورید.



حل) مطابق شکل داریم:



$\overset{\Delta}{ABC}: \tan۲۰^\circ = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow ۰/۳۶ = \frac{h}{۶}$

$\Rightarrow h = ۶ \times ۰/۳۶ = ۲/۱۶ \quad (*)$

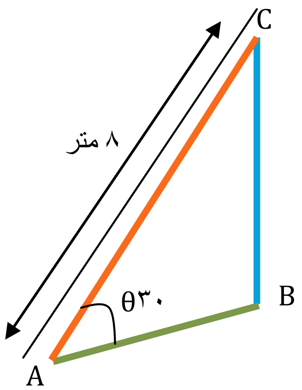
در مثلث قائم الزاویهٔ ABD، $A = ۴۵^\circ$. داریم:

$$\tan A = \frac{BD}{AB} \Longrightarrow \tan ۴۵^\circ = \frac{h + x}{۶} \Longrightarrow ۱ = \frac{h + x}{۶}$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲/۱۶ + x = ۶ \Longrightarrow x = ۳/۸۴$$

بنابراین طول میلهٔ پرچم ۳/۸۴متر است.

مثال : مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta = ۳۰^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



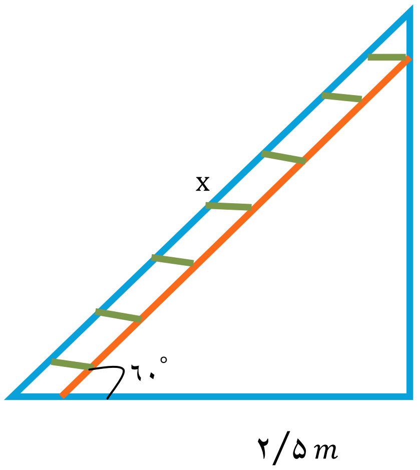
$$\sin\theta = \frac{BC}{۸} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۸} \Longrightarrow ۲BC = ۸ \Longrightarrow BC = ۴$$

اکنون به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^۲ = AC^۲ - BC^۲ = ۸^۲ - ۴^۲ = ۴۸ \Longrightarrow AB = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

مثال: اگر نردبانی را به دیواری تکیه داده باشیم بطوریکه فاصله ی پای نردبان تا دیوار $۲/۵\,m$ باشد و زاویه ای که نردبان با سطح افق می سازد، ۶۰° باشد، طول نردبان را محاسبه کنید. انتهای نردبان در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار گرفته است؟

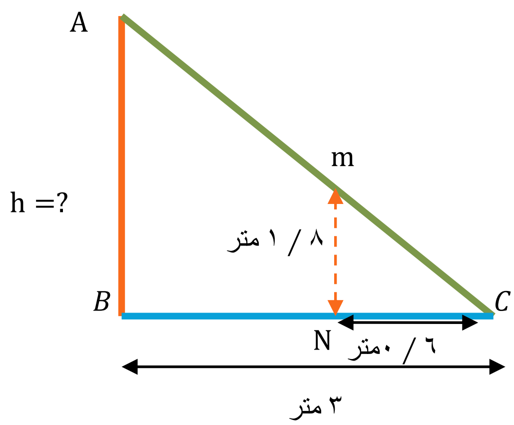
$$cos۶۰^\circ = \frac{۲/۵}{x} \to \frac{۱}{۲} = \frac{۲/۵}{x} \to x = ۵$$



مثال : کیان می خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد کیان ۱ / ۸ متر و سایهٔ او در همان لحظه ۰ / ٦ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

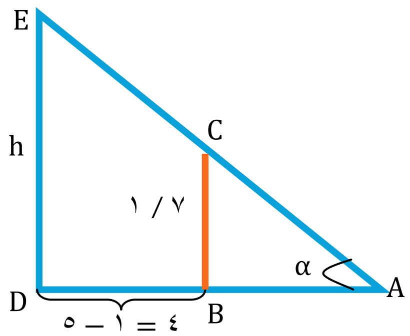
$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{N} = ۹۰^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \to \overset{\Delta}{\widehat{ABC}} \sim \overset{\Delta}{\widehat{MNC}} \Longrightarrow$$

$$\cancel{\frac{CN}{CB}} = \frac{CM}{AC} = \cancel{\frac{MN}{AB}} \to \frac{۰/۶}{۳} = \frac{۱/۸}{h} \to h = \frac{۵/۴}{۰/۶} = ۹m$$



مثال : کمیل می خواهد ارتفاع یک میله را که طول سایهٔ آن ۵ متر است، حساب کند. قد علی ۱ / ۷ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۱ متر است. ارتفاع میله چه قدر است؟

حل) فرض کنیم ED میلهٔ مورد نظر باشد. حال کمیل باید در نقطه ای قرار بگیرد که انتهای سایه های میله و خودش بر هم منطبق شوند. فرض کنیم α زاویهٔ پرتو تابش خورشید با سطح افق باشد . در این صورت:



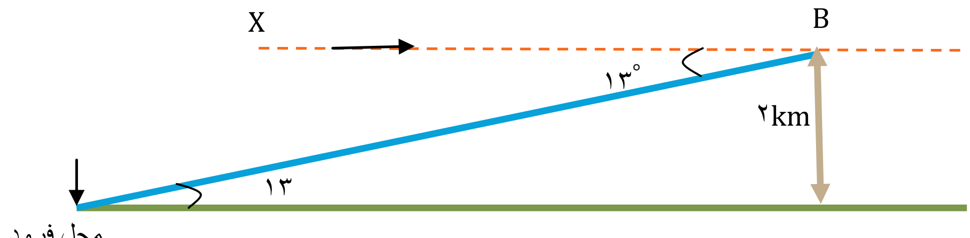
$$ABC: tan\alpha = \frac{BC}{AB} \quad (۱), \qquad ADE: tan\alpha = \frac{DE}{AD} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{۱/۷}{۱} = \frac{h}{۵} \Rightarrow h = ۵ \times ۱/۷ = ۸/۵$$

مثال : یک هواپیما در ارتفاع $۲km$ از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله ای از نقطهٔ A فرود می آید.

$$\tan ۱۳^\circ \cong ۰/۲۳ \qquad BX \parallel AC \xrightarrow{CB\ \text{مورب}} \widehat{B_۱} = \hat{C} = ۱۳^\circ$$

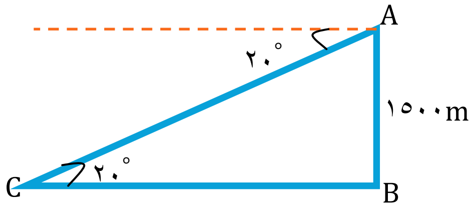
$$\tan ۱۳^\circ = \frac{AB}{AC} \to AC = \frac{۲}{۰/۲۳} \to AC \cong ۸/۶۹\ km$$



مثال : یک هواپیما در ارتفاع ۱۵۰۰ متری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق ۲۰° باشد، هواپیما تقریباً چه مسافتی را طی می کند تا روی زمین بنشیند؟ ($\sin ۲۰^\circ = ۰/۳۴$)

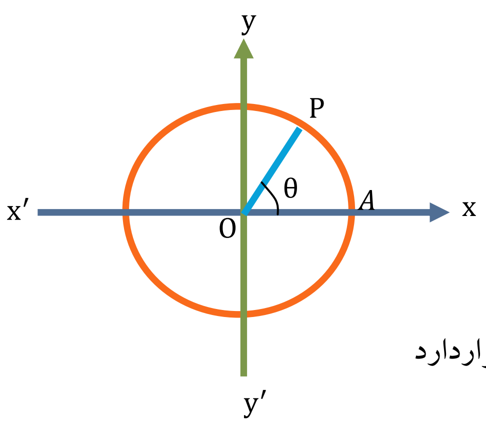
حل) مطابق شکل، اگر هواپیما در نقطهٔ A باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ موازی و مورب، اندازهٔ زاویهٔ C برابر ۲۰° است و داریم (C محل فرود هواپیما است):

$$\sin C = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \sin ۲۰^{\circ} = \frac{۱۵۰۰}{AC} \Longrightarrow AC = \frac{۱۵۰۰}{۰/۳۴} \cong ۴۴۱۲$$



درس سوم: دایره مثلثاتی

دایره ی زیرکه دارای سه ویژگی است را دایره مثلثاتی گوییم.



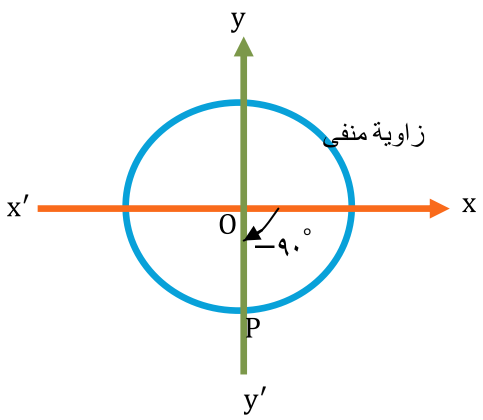
۱- مرکزدایره در مبدأ مختصات قراردارد

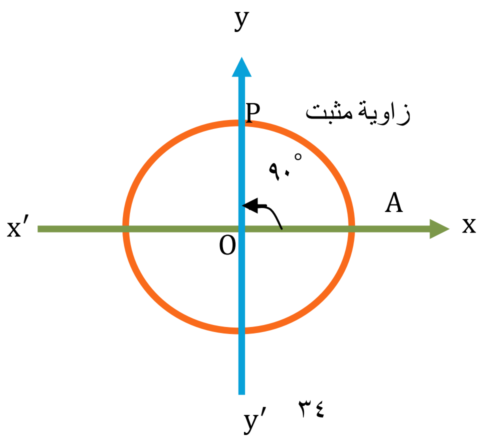
۲- شعاع دایره۱ است

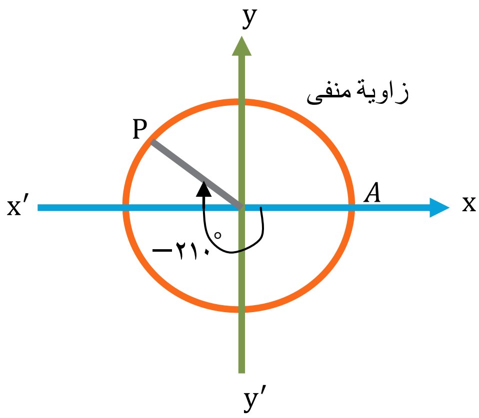
۳- نقطهٔ Aمبدأ حرکت برای رسم زاویه است.

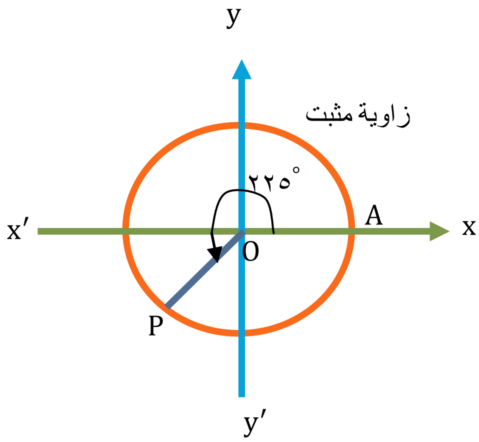
قرارداد:گر نقطهٔ P روی این دایره در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند، زاویهٔ AOP مثبت و

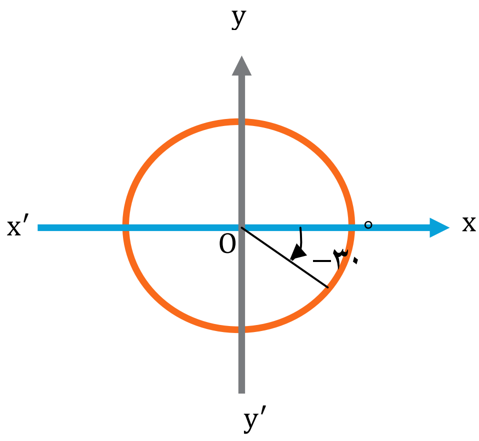
اگرحرکت در جهت عقربه های ساعت باشد، زاویه منفی است.

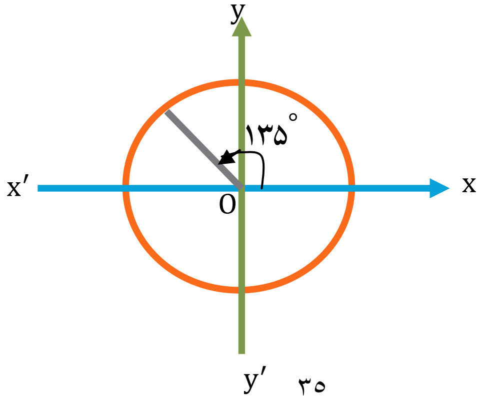


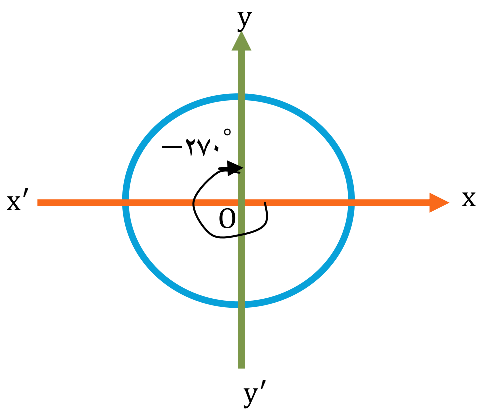



y
زاویهٔ منفی
P
A
x′
x
−۲۱۰°
y′

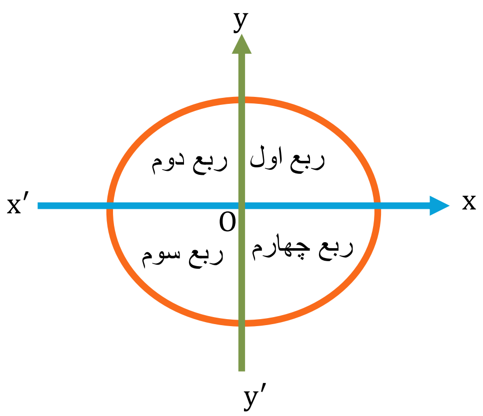

y
زاویهٔ مثبت
۲۲۵°
A
x′
x
O
P
y′


y
x′
x
O
−۳۰°
y′


y
۱۳۵°
x′
x
O
y′



تذکر: دو محور عمود بر هم x'ox و y'oy صفحه را به چهار قسمت تقسیم می کنند. هر یک از این قسمت ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می نامیم. با توجه به جهت دایرهٔ مثلثاتی، ناحیهٔ xoy را ربع اول، ناحیهٔ $x'oy$ را ربع دوم، ناحیهٔ x'oy$'$ را ربع سوم و ناحیهٔ xoy$'$ را ربع چهارم مثلثاتی می نامیم.



در ربع اول است α $\Longrightarrow= ۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$

در ربع دوم است α $\Longrightarrow= ۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$

در ربع سوم است α $\Longrightarrow= ۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ$

در ربع چهارم است α $\Longrightarrow= ۲۷۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ$

نکته: زاویه های $^\circ$۰, $^\circ$۹۰, $^\circ$۱۸۰, $^\circ$۲۷۰ و $^\circ$۳۶۰ **زوایای مرزی** هستند و آنها را در هیچ کدام از ناحیه های فوق در نظر نمی گیریم

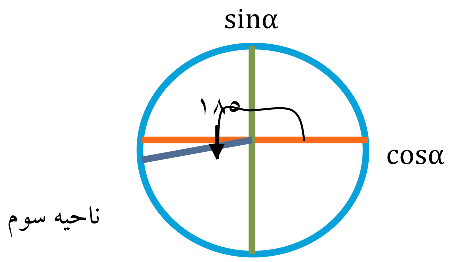
مثال: مشخص کنید هر یک از زاویه های زیر در کدام یک از نواحی چهار گانه قرار می گیرد؟

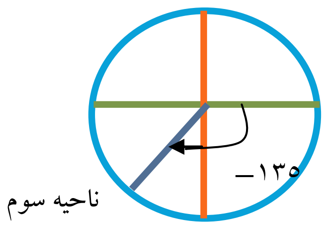
الف) -۳۰° ب) ۶۵° پ) ۱۸۲° ت) -۹۵°

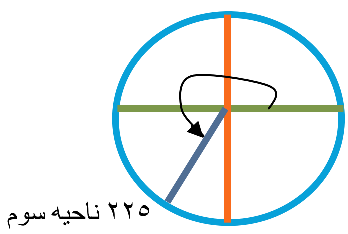
چهارم اول سوم سوم

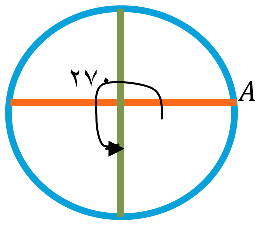
مثال : هر یک از زاویه های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد.

الف) $+۲۷۰^\circ$ ب) ۲۲۵° پ) -۱۳۵° ت) ۱۸۵°









هیچکدام از نواحی

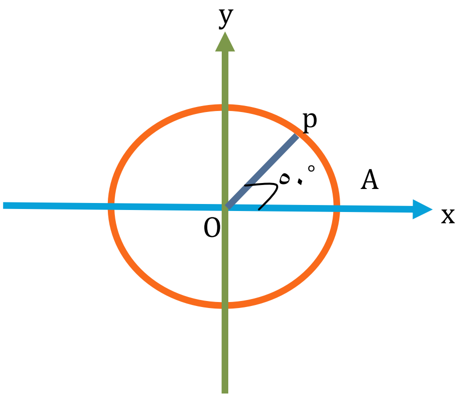
مثال : هر یک از زاویه های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید و سپس مشخص کنید که در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرند.

آ) ۵۰° ب) -۷۵° پ) $\frac{۲\pi}{۳} = ۱۲۰^\circ$ ت) ۱۷۵°

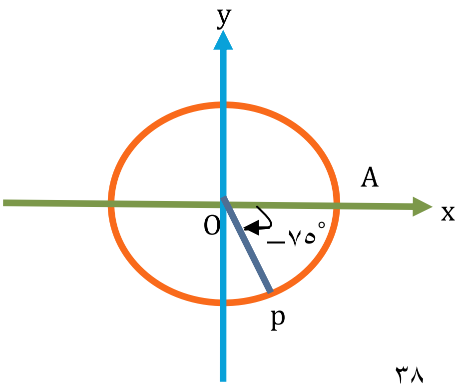
ث) ۲۴۰° ج) $-\frac{۴\pi}{۳} = -۲۴۰^\circ$ چ) ۱۸۰° ح) -۳۰۰°

حل) اگر اندازهٔ زاویهٔ داده شده مثبت باشد، OA را باید در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت و اگر اندازهٔ داده شده منفی باشد، OAرا باید در جهت حرکت عقربه های ساعت دوران داد.

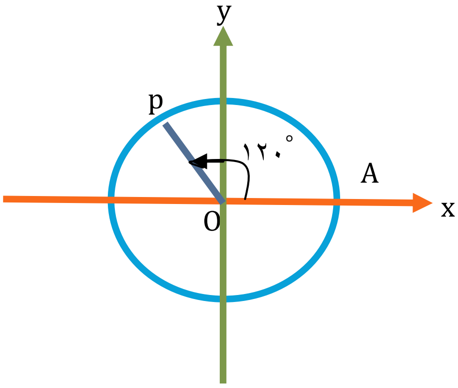
آ) ناحیهٔ اول



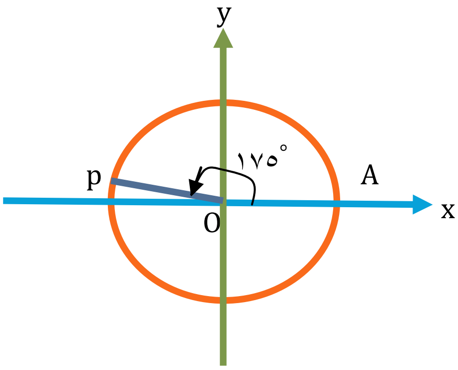
ب) ناحیهٔ چهارم



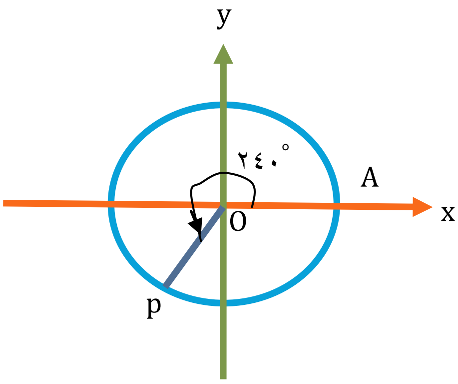
پ) ناحیهٔ دوم



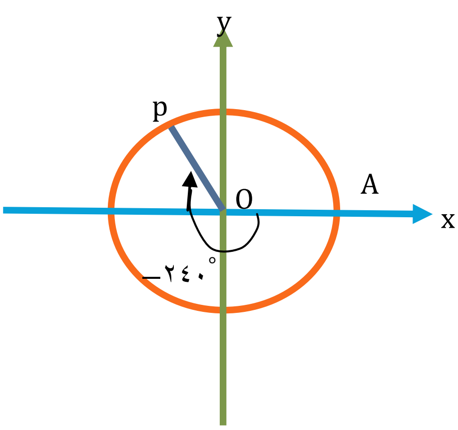
ت) ناحیهٔ دوم



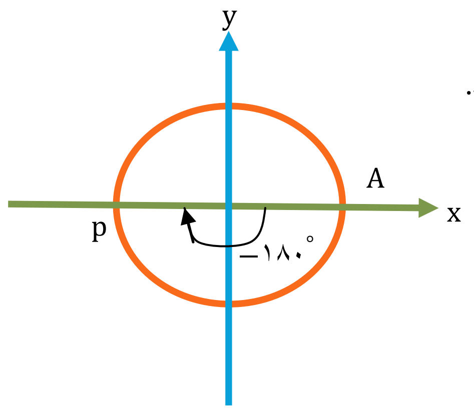
ث) ناحیهٔ سوم



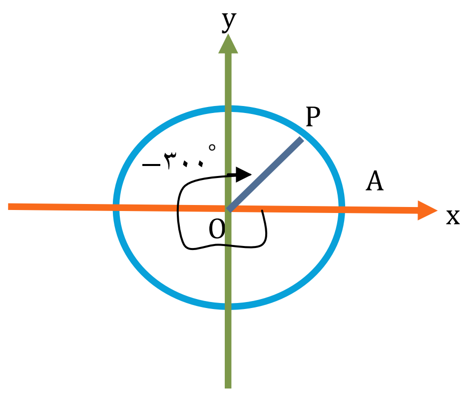
ج) ناحیهٔ دوم



چ) نقاط مرزی در هیچ یک از ناحیه ها قرار ندارند.



ح) ناحیهٔ اول



مثال: بدون رسم دایره مثلثاتی مشخص کنید هر یک از زوایای زیر در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارند؟

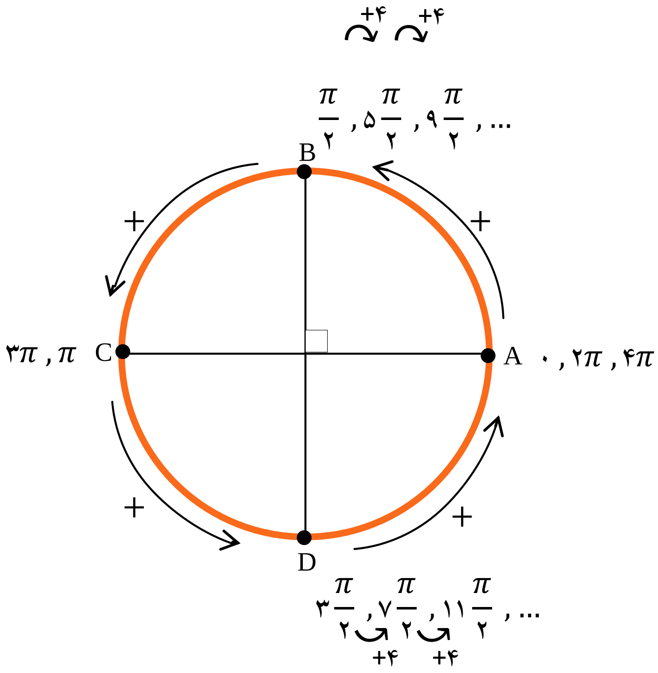
۱۳۸, ۳۲۱, −۲۲۰, −۷۵, −۷۲۰, ۵۴۰, −۲۷۰

مرز بین ناحیه اول و دوم , مرز بین ناحیه دوم و سوم , مرز بین ناحیه اول و چهارم ,چهارم ,دوم ,چهارم ,دوم

تمرین: زاویه های زیر را روی دایره ی مثلثاتی رسم کنید.

۶۰, ۱۵۰, ۲۷۰, ۳۱۵, −۳۰, −۹۰, −۱۳۵, −۱۸۰, −۲۴۰

مثال : مشخص کنید هر یک از زوایای زیر در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارند؟



$\frac{\pi}{۲}-\alpha \longrightarrow$ ناحیه اول

$۷\frac{\pi}{۲}+\alpha \longrightarrow$ ناحیه چهارم

$۵\frac{\pi}{۲}+\alpha \longrightarrow$ ناحیه دوم

$۲\pi-\alpha \longrightarrow$ ناحیه چهارم

$۳\frac{\pi}{۲}+\alpha \longrightarrow$ ناحیه چهارم

$۹\frac{\pi}{۲}-\alpha \longrightarrow$ ناحیه اول

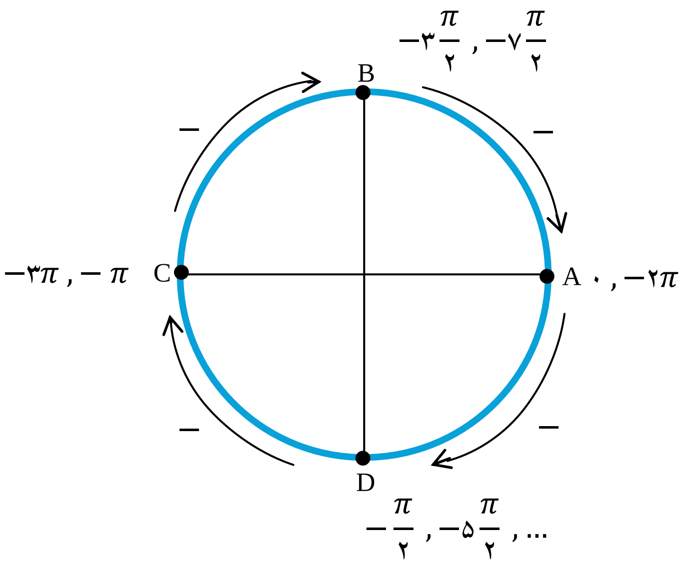
$۱۱\frac{\pi}{۲}-\alpha \longrightarrow$ ناحیه سوم

$۳\pi-\alpha \longrightarrow$ ناحیه دوم

$۴\pi-\alpha \longrightarrow$ ناحیه چهارم

$\pi+\alpha \longrightarrow$ ناحیه سوم

$\pi-\alpha \longrightarrow$ ناحیه دوم



$-\pi+\alpha \longrightarrow$ ناحیه سوم

$-\frac{\pi}{۲}-\alpha \longrightarrow$ ناحیه سوم

$-۳\pi+\alpha \longrightarrow$ ناحیه سوم

$-۵\frac{\pi}{۲}+\alpha \longrightarrow$ ناحیه چهارم

$-۷\frac{\pi}{۲}-\alpha \longrightarrow$ ناحیه اول

$\alpha-\pi \longrightarrow$ ناحیه سوم

$-\alpha-۲\pi \longrightarrow$ ناحیه چهارم

$-\frac{۳\pi}{۲}+\alpha \longrightarrow$ ناحیه دوم

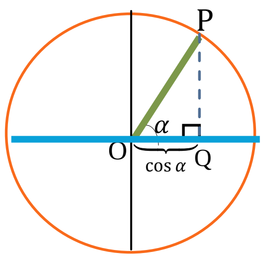
$-۲\pi-\alpha \longrightarrow$ ناحیه چهارم

برای تعیین ناحیه ابتدا با توجه به مضارب π یا مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ به یکی از نقاط A یا B یا C یا D می‌رسیم حال اگر علامت ضریب π یا مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ و علامت ضریب α هم علامت باشند موافق حرکت اولیه به سمت جلو حرکت می‌کنیم و اگر مختلف العلامه باشند به سمت عقب برمی‌گردیم.

درس چهارم :محورهای نسبت های مثلثاتی

محور cos :

فرض کنید Pنقطه ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی زیر باشد و αزاویه ای است که نیم خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{OX}$ می سازد. از نقطهٔ Pخطی بر محور $\overrightarrow{OX}$ عمود می کنیم و محل برخورد را Q می نامیم.

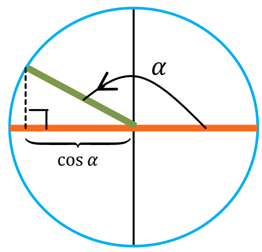


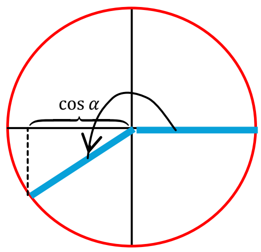
در مثلث OPQ داریم:

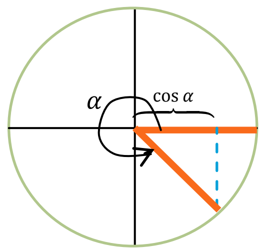
$$\cos\alpha = \frac{OQ}{OP} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{OQ}{۱} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = OQ}$$

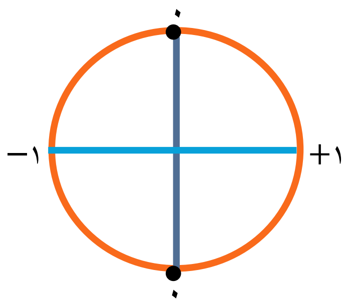
یعنی برای محاسبه $\cos\alpha$ از نوک نیم خط متحرک یعنی نقطه P

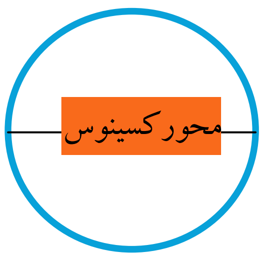
بر محور xها عمود می‌کنیم از مبدأ تا جایی که محور xها را قطع کند مقدارکسینوس را به ما می دهد.

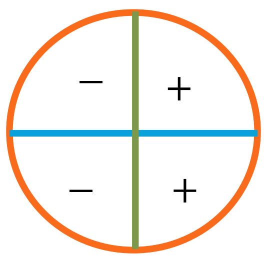












محور $x'ox$ یا محور x ها را محور کسینوس ها می نامیم

$$-۱ \le \cos\alpha \le ۱$$

$$\cos ۰^{\circ} = ۱$$
$$\cos ۳۶۰^{\circ} = ۱$$
$$\cos ۱۸۰^{\circ} = -۱$$

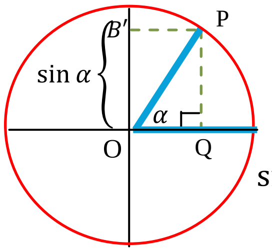
$$\cos ۹۰^{\circ} = ۰$$
$$\cos ۲۷۰^{\circ} = ۰$$

$$\cos \frac{\pi}{۲} = ۰ \qquad \cos ۰ = ۱$$
$$\cos ۲\pi = ۱$$
$$\cos \frac{۳\pi}{۲} = ۰ \qquad \cos \pi = -۱$$

محور sin

فرض کنید Pنقطه ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی زیر باشد و αزاویه ای است که نیم خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{OX}$ می سازد. از نقطهٔ P خطی بر محور $\overrightarrow{OX}$ عمود می کنیم و محل برخورد را Q می نامیم.

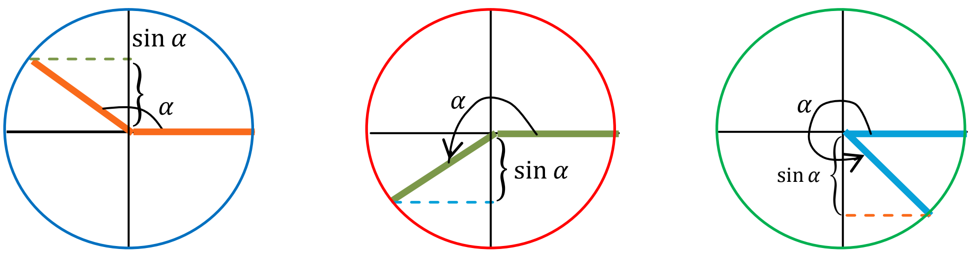
در مثلث OPQ داریم:

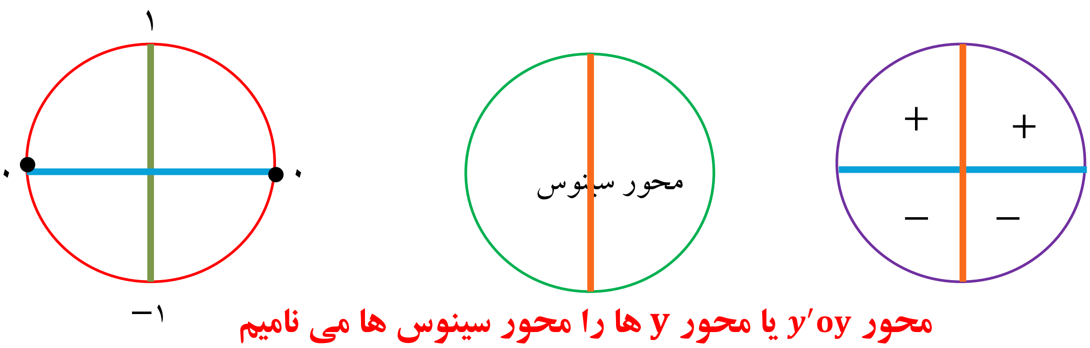


$$\sin\alpha = \frac{PQ}{OP} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{PQ}{۱} \Longrightarrow \sin\alpha = PQ \xrightarrow{PQ=OB'} \boxed{\sin\alpha = OB'}$$

یعنی برای محاسبه $\sin\alpha$ از نوک نیم خط متحرک یعنی نقطه P بر محور yها عمود می کنیم

از مبدأ تا جایی که محور yها را قطع می کند مقدار $\sin\alpha$ است.





محور $y'oy$ یا محور y ها را محور سینوس ها می نامیم

$$-۱ \leq sin\,\alpha \leq ۱$$

$\sin ۰^\circ = ۰$
$\sin ۱۸۰^\circ = ۰$
$\sin ۳۶۰^\circ = ۰$

$\sin ۹۰^\circ = ۱$
$\sin ۲۷۰^\circ = -۱$

$\sin ۰ = ۰$
$\sin \pi = ۰$
$\sin ۲\pi = ۰$

$\sin \frac{\pi}{۲} = ۱$
$\sin \frac{۳\pi}{۲} = -۱$

در جاهای خالی <> قرار دهید.

$\sin ۲۶^\circ < \sin ۲۷^\circ$ $\quad$ $\sin ۵۸^\circ > \sin ۵۷^\circ$

$\sin ۲۲۰^\circ < \sin ۲۲۱^\circ$ $\quad$ $\sin ۲۹۰^\circ < \sin ۲۹۱^\circ$

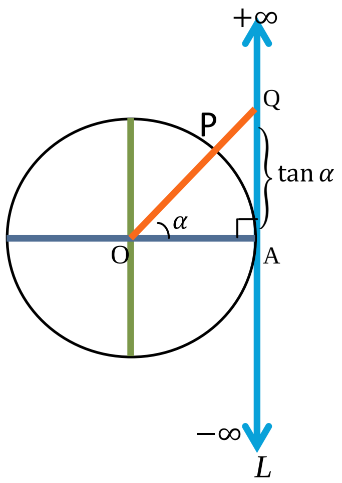
محور tan:

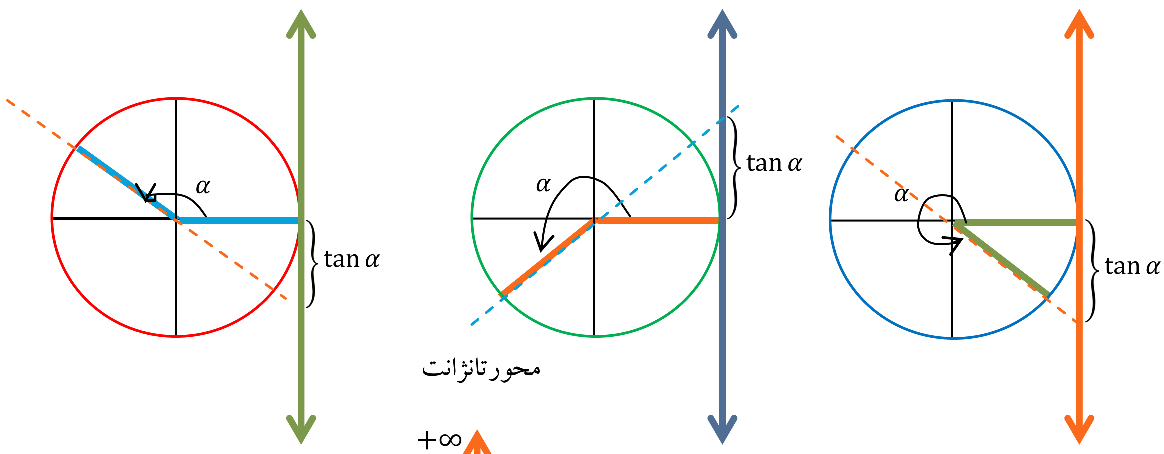
فرض کنید Pنقطه ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی روبه رو باشد و α زاویه ای است که نیم خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{OX}$ می سازد. اگر نیم خط $\overrightarrow{OP}$ را امتداد دهیم تا خط L را درنقطه ی Q قطع کند.

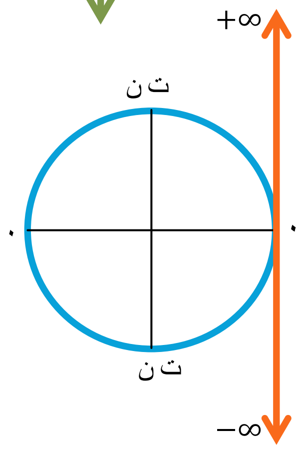
در مثلث OAQ :

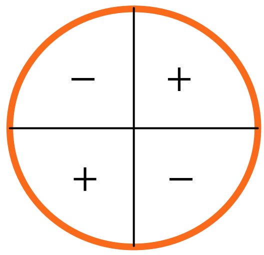
$$\tan\alpha = \frac{AQ}{OA} = \frac{AQ}{۱} \Longrightarrow \boxed{\tan\alpha = AQ}$$

یعنی برای محاسبه $\tan\alpha$ نوک نیم خط متحرک را امتداد می‌دهیم تا خط L را قطع کند از نقطه‌ی A (مبدأ خط L) تا جایی که خط L را قطع کند مقدار $\tan\alpha$ است.









$\tan ۹۰^{\circ} =$ تعریف نشده

$\tan ۲۷۰^{\circ} =$ تعریف نشده

$\tan \frac{\pi}{۲} =$ تعریف نشده

$\tan \frac{۳\pi}{۲} =$ تعریف نشده

$\tan ۱۸۰^{\circ} = ۰$

$\tan ۰^{\circ} = ۰$

$\tan ۳۶۰^{\circ} = ۰$

$\tan \pi = ۰$

$\tan ۰ = ۰$

$\tan ۲\pi = ۰$

علامت <> قرار دهید؟

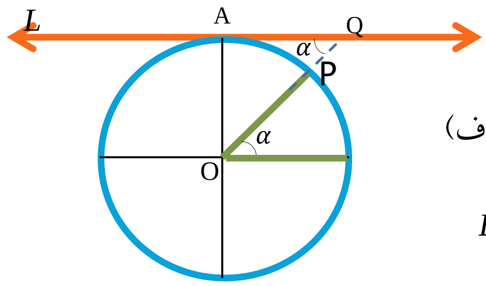
$\tan ۳۲^{\circ} < \tan ۳۳^{\circ}$

$\tan ۱۰۲^{\circ} < \tan ۱۰۳^{\circ}$

محور cot :

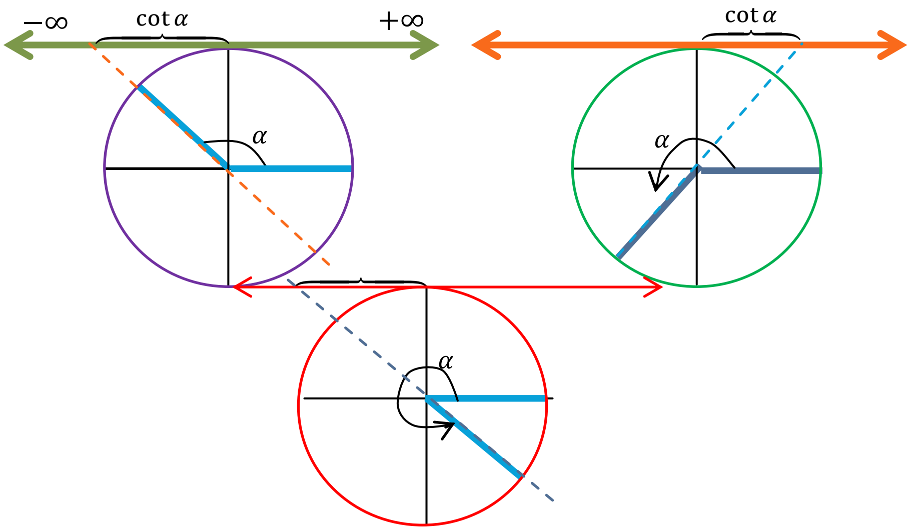
فرض کنید P نقطه ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی روبه رو باشد و α زاویه ای است که نیم خط $\vec{OP}$ با محور $\vec{OX}$ می سازد. اگر نیم خط $\vec{OP}$ را امتداد دهیم تا خط L را درنقطه ی Q قطع کند.

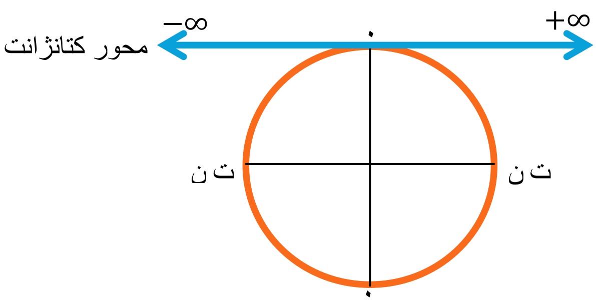
در مثلث OAQ:

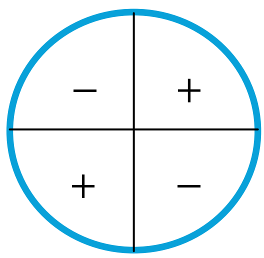


$$\cot\alpha = \frac{AQ}{OA} = \frac{AQ}{۱} \Longrightarrow \boxed{\cot\alpha = AQ}$$

یعنی برای محاسبه $\cot\alpha$ نوک عقربه را امتداد می‌دهیم (از دو طرف) تا خط L را قطع کند از نقطه‌ی A (مبدأ خط L) تا جایی که خط L را قطع کند مقدار $\cot\alpha$ است.







$\cot 180^\circ =$ تعریف نشده

$\cot 0^\circ =$ تعریف نشده

$\cot 360^\circ =$ تعریف نشده

$\cot 90^\circ = 0$

$\cot 270^\circ = 0$

$\cot \pi =$ تعریف نشده

$\cot 0 =$ تعریف نشده

$\cot 2\pi =$ تعریف نشده

$\cot \frac{\pi}{2} = 0$

$\cot \frac{3\pi}{2} = 0$

علامت <> قرار دهید؟

$\cot 25^\circ > \cot 26^\circ$ $\qquad$ $\cot 30^\circ > \cot 31^\circ$

$\cot 105^\circ < \cot 106^\circ$ $\qquad$ $\cot 44^\circ < \cot 43^\circ$

مثال: به جای ○ نماد < یا > قرار دهید.

۱) $\sin 20 < \sin 40$ $\qquad$ ۲) $\cos 20 > \cos 40$

۳) $\tan 20 < \tan 40$ $\qquad$ ۴) $\cot 20 > \cot 40$

۵) $\sin 120 > \sin 150$ $\qquad$ ۶) $\cos 120 > \cos 180$

۷) $\cos 260 < \cos 310$ $\qquad$ ۸) $\sin 240 > \sin 270$

۹) $\sin 120 > \cos 240$ $\qquad$ ۱۰) $\sin 240 < \cos(-20)$

۱۱) $\tan 40 < \tan 60$ $\qquad$ ۱۲) $\cot 40 > \cot 60$

۱۳) $\sin 20 < \sin 40$ $\qquad$ ۱۴) $\cos 260 < \cos 310$

مثال : در ناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی:

آ) زاویه ای مانند α را طوری پیدا کنید که $\tan\alpha > cot\alpha$

ب) زاویه ای مانند β را طوری پیدا کنید که $\cot\beta > tan\beta$

پ) از قسمت های (آ) و (ب) چه نتیجه ای می گیرید؟

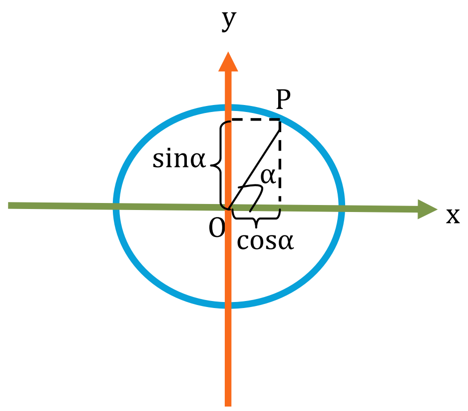
حل آ)

$$\alpha = ٦٠^\circ \Longrightarrow \tan٦٠^\circ = \sqrt{٣} > cot٦٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$$

ب)

$$\beta = ٣٠^\circ \Longrightarrow \tan٣٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٣} < cot٣٠^\circ = \sqrt{٣}$$

پ)به ازای $\alpha = ٤٥^\circ$، مقادیر $\tan\alpha$ و $cot\alpha$ با هم برابرند.



$$(\tan٤٥^\circ = \cot٤٥^\circ = ١)$$

اگر $٤٥^\circ > \alpha > ٠$، آن گاه :

$$\sin\alpha < cos\alpha \Longrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < ١ \Longrightarrow tan\alpha < ١$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} > ۱ \Rightarrow cot\alpha > tan\alpha$$

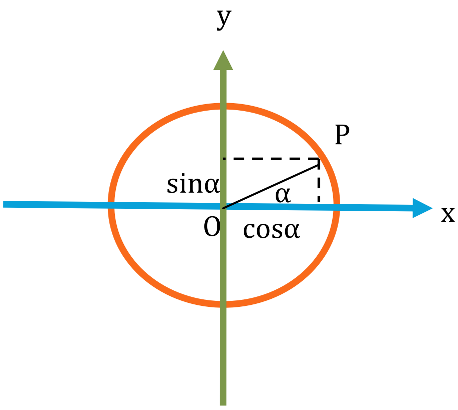
اگر $۹۰^\circ > \alpha > ۴۵^\circ$، آن گاه :

$$\sin\alpha > cos\alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha > ۱$$

$$\Rightarrow cot\alpha < ۱ \Rightarrow \tan\alpha > cot\alpha$$

بنابراین اگر $\alpha \in (۰, ۴۵^\circ)$، آن گاه مقادیر کتانژانت از مقادیر تانژانت و مقادیر کسینوس از سینوس بیش تر و

اگر $\alpha \in (۴۵^\circ, ۹۰^\circ)$، آن گاه مقادیر تانژانت از مقادیر کتانژانت و مقادیر سینوس از کسینوس بیش تر است.

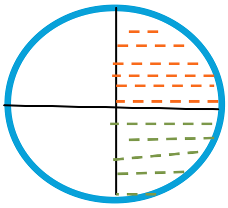


علامت نسبت های مثلثاتی

مقدار	ربع اول $x,y>\cdot$	ربع دوم $x<\cdot, y>\cdot$	ربع سوم $x<\cdot, y<\cdot$	ربع چهارم $x>\cdot, y<\cdot$
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

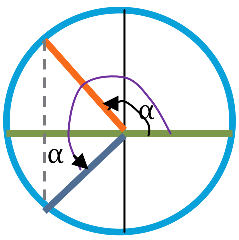
مثال : اگر $tan\theta$ و $\sin\theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

θ می تواند در نواحی اول و چهارم باشد.



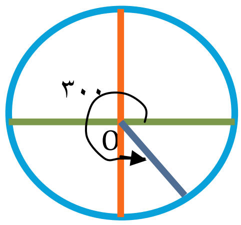
مثال: اگر $\cos\alpha=-\frac{۲}{۵}$، آنگاه α در چه ناحیه ای می تواند قرار بگیرد؟

α می توان در نواحی دوم یا سوم باشد.



مثال :زاویه ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

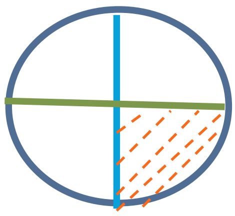
برای آنکه سینوس منفی و کسینوس مثبت باشد کافی است در ناحیه چهارم باشیم مثلاً $\alpha = ۳۰۰^\circ$



مثال :حدود زاویهٔ θرا در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

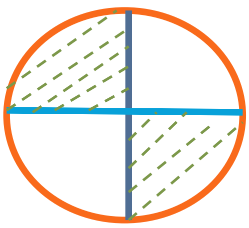
الف) $\sin\theta > ۰, \cos\theta > ۰$ جواب : $۰ < \theta < ۹۰$

ب) $\sin\theta < ۰, \cos\theta > ۰$ جواب : $۲۷۰ < \theta < ۳۶۰$



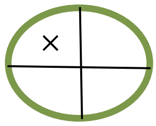
مثال : اگر $\sin\alpha \times \cos\alpha < ۰$، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

$\cos\alpha, \sin\alpha$ مختلف العلامه هستند پس α در نواحی دوم یا چهارم است.



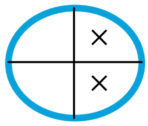
مثال: با توجه به اطلاعاتی که در موارد زیر داده شده است، تعیین کنید که α در کدام ربع های مثلثاتی قرار دارد؟

۱) $sin\alpha > ۰ , cos\alpha < ۰ \rightarrow$



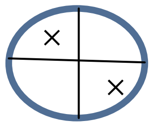
ناحیه دوم

۲) $tan\alpha, sin\alpha \rightarrow$ هم علامتند



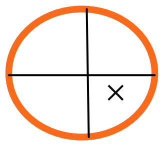
اول و چهارم

۳) $sin\alpha cos\alpha < ۰ \rightarrow$



اول و چهارم

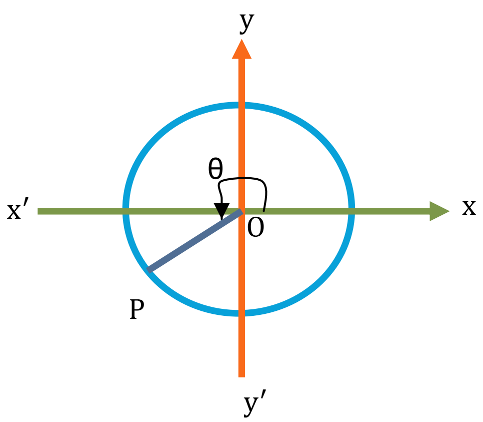
۴) $sin\alpha tan\alpha > ۰, cot\alpha < ۰$



چهارم

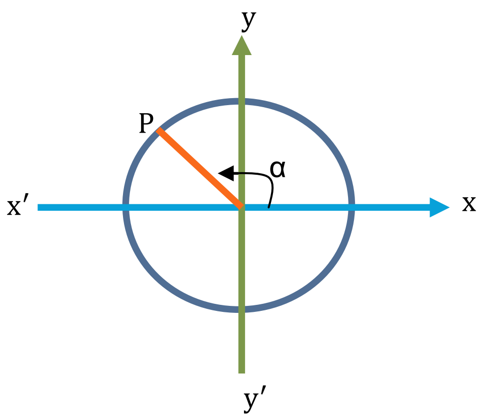
مثال: فرض کنید θ زاویه ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه $y = sin\theta$ و $x = \cos\theta$ و در ربع سوم $x, y < ۰$، علامت هر یک از نسبت های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

$\sin\theta < ۰ \qquad cos\theta < ۰ \qquad tan\theta > ۰ \qquad cot\theta > ۰$



مثال : فرض کنید α زاویه ای در دایرهٔ مثلثاتی در ربع دوم باشد علامت هر یک از نسبت های مثلثاتی θ را مشخص کنید.

$\sin\theta > ۰$ $\quad$ $cos\theta < ۰$ $\quad$ $tan\theta < ۰$ $\quad$ $cot\theta < ۰$



مثال) در هر یک از قسمت های زیر، زاویه ای مثال بزنید که در شراط های داده شده صدق کنند.

آ) سینوس مثبت و کسینوس منفی باشد. ب) سینوس منفی و تانژانت مثبت باشد.

ب) کسینوس مثبت و کتانژانت منفی باشد. ت)سینوس و کتانژانت منفی باشد.

ث) کسینوس منفی و تانژانت مثبت باشد. ج) تانژانت و کتانژانت منفی باشد.

حل آ) در ناحیهٔ دوم ، سینوس مثبت و کسینوس منفی است. هر زاویه ای مانند θ که $۹۰^{\circ} < \theta < ۱۸۰^{\circ}$ باشد، جواب است، مانند $\theta = ۱۰۰^{\circ}$

ب) در ناحیهٔ سوم، سینوس منفی و تانژانت مثبت می باشد. هر زاویه ای مانند θ که $۱۸۰^{\circ} < \theta < ۲۷۰^{\circ}$ باشد، جواب است، مانند $\theta = ۲۰۰^{\circ}$

پ) در ناحیهٔ چهارم، کسینوس مثبت و کتانژانت منفی می باشد. هر زاویه ای مانند θ که $۲۷۰^{\circ} < \theta < ۳۶۰^{\circ}$ باشد، جواب است، مانند $\theta = ۳۱۰^{\circ}$

ت) در ناحیهٔ چهارم، سینوس و کتانژانت منفی می باشند، مانند $\theta = ۲۹۰^\circ$

ث) در ناحیهٔ سوم، کسینوس منفی و تانژانت مثبت می باشند، مانند $\theta = ۱۹۰^\circ$

ج) در ناحیهٔ دوم و چهارم، تانژانت و کتانژانت منفی می باشند. هر زاویه ای مانند θ که $۹۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$ یا $۲۷۰^\circ < \theta < ۳۶۰^\circ$ باشد، جواب است مانند $\theta = ۱۰۰^\circ$ یا $\theta = ۳۴۰^\circ$

مثال : در هر یک از حالت های زیر، حدود زاویهٔ θ را مشخص کنید.

آ) $cos\theta > ۰ , \sin\theta < ۰$ ب) $cos\theta < ۰ , \tan\theta > ۰$

پ) $sin\theta > ۰ , \cot\theta < ۰$ ت) $sin\theta \times \cos\theta > ۰$

ث) $tan\theta \times \sin\theta < ۰$ ج) $cos\theta \times \tan\theta > ۰ , \sin\theta \times \cos\theta < ۰$

چ) $sin^۲\theta \times \tan\theta < ۰ , \cot\theta \times cos\theta > ۰$

حل آ) سینوس در ناحیه های سوم و چهارم منفی و کسینوس در ناحیه های اول و چهارم مثبت است. بنابراین θ در ناحیهٔ چهارم قرار دارد و در نتیجه $۲۷۰^\circ < \theta < ۳۶۰^\circ$

ب) تانژانت در ناحیه های اول و سوم مثبت و کسینوس در ناحیه های دوم و سوم منفی می باشد. پس θ در ناحیهٔ سوم قرار دارد و در نتیجه $۱۸۰^\circ < \theta < -۲۷۰^\circ$

پ) کتانژانت در ناحیه های دوم و چهارم منفی و سینوس در ناحیه های اول و دوم مثبت می باشد. بنابراین θ در ناحیهٔ دوم قرار دارد و در نتیجه $۹۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$

ت) اگر ضرب دو عدد مثبت باشد، آن گاه هر دو عدد مثبت یا هر دو عدد منفی اند، پس:

$$\sin\theta.\cos\theta > ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta, \cos\theta > ۰ \Rightarrow ۰^\circ < \theta < ۹۰^\circ \\ \text{یا} \\ sin\theta, \cos\theta < ۰ \Rightarrow ۱۸۰^\circ < \theta < ۲۷۰^\circ \end{cases}$$

ث)

$$\tan\theta \times \sin\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \sin\theta = \frac{\sin^۲\theta}{\cos\theta} < ۰$$

* $\sin^۲$ همواره بزرگ تر یا مساوی صفر است، پس $\cos\theta$ باید عددی منفی باشد و در نتیجه:

$$۹۰^\circ < \theta < ۲۷۰^\circ$$

ج)

$$\cos\theta \times \tan\theta = \cos\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta > ۰$$

$\Rightarrow$. در ناحیه های اول و دوم قرار دارد θ (۱)

$$\sin\theta \times \cos\theta < ۰ \xrightarrow{\sin\theta>۰} \cos\theta < ۰$$

$\Rightarrow$. در ناحیه های دوم و سوم قرار دارد θ (۲)

(۱), (۲) $\Rightarrow$. در ناحیهٔ دوم قرار می گیرد $\theta \Rightarrow ۹۰^\circ < \theta < -۱۸۰^\circ$

چ)

$$\sin^۲\theta \times \tan\theta < ۰ \xrightarrow{\sin^۲\theta۰>} \tan\theta < ۰$$

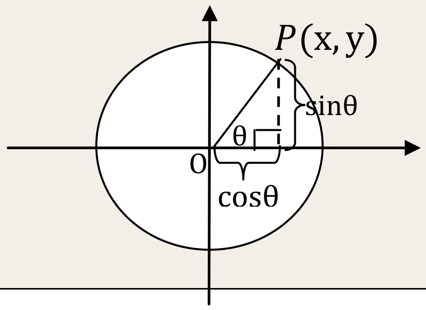
$\Rightarrow$. در ناحیه های دوم و چهارم قرار دارد θ (۱)

$$\cot\theta \times \cos\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \times \cos\theta = \frac{\cos^۲\theta}{\sin\theta} > ۰ \xrightarrow{\cos^۲\theta>۰} \sin\theta > ۰$$

$\Rightarrow$. در ناحیهٔ اول و دوم قرار دارد θ (۲)

(۱), (۲) $\Rightarrow$. در ناحیهٔ دوم قرار دارد $\theta \Rightarrow ۹۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$

نکته : با توجه به اینکه محور x ها را محور کسینوس ها و محور y ها را محور سینوس ها می نامیم اگر P نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی باشد که نیم خط OP با قسمت مثبت محور x ها زاویهٔ θ می سازد، آنگاه p نقطه ای با مختصات (x, y) است که در آن $x = cos\theta$ و $y = \sin\theta$.



مثال: می دانیم نقطه ی انتهای کمان زاویه ی α دایره مثلثاتی را در نقطه ی $p(\frac{\sqrt{۳}}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ قطع می کند و زاویه ی ایجاد شده ۱۵۰° است. نسبتهای مثلثاتی زاویه ی ۱۵۰° را بیابید.

نکته: اگر $p(x, y)$ نقطه ی روی محیط دایره باشد

$$\begin{cases} x = cos\alpha \\ y = sin\alpha \end{cases}$$

$$p\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}, -\frac{۱}{۲}\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{۳}}{۲} = cos۱۵۰^\circ \\ -\frac{۱}{۲} = sin۱۵۰^\circ \end{cases} \qquad , cot۱۵۰^\circ = \frac{cos۱۵۰^\circ}{sin۱۵۰^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{۱}{۲}} = \frac{-\sqrt{۳}}{۱}$$

$$tan۱۵۰^\circ = \frac{sin۱۵۰^\circ}{cos۱۵۰^\circ} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

مثال: نقطهٔ P به طول $\frac{-۱}{\sqrt{۵}}$ روی دایرهٔ مثلثاتی و در ناحیهٔ دوم قرار دارد. اگر θ زاویهٔ بین نیم خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{OX}$ باشد، نسبت های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید.

حل) اگر $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، آن گاه:

$$x^۲+y^۲=۱, sin\theta=y, \cos\theta=x, \tan\theta=\frac{y}{x}, \cot\theta=\frac{x}{y}$$

P در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $x<۰$ و $y>۰$

$$x=-\frac{۱}{\sqrt{۵}}, x^۲+y^۲=۱ \Rightarrow (-\frac{۱}{\sqrt{۵}})^۲+y^۲=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۵}+y^۲=۱$$

$$\Rightarrow y^۲=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow y=\pm\frac{۲}{\sqrt{۵}} \xrightarrow{y>۰} y=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین:

$$sin\theta=y=\frac{۲}{\sqrt{۵}}, cos\theta=x=-\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{\frac{-۱}{\sqrt{۵}}}=-۲, \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{\frac{-۱}{\sqrt{۵}}}{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}=-\frac{۱}{۲}$$

مثال) نقطهٔ P به عرض $-\frac{۱}{۲}$ روی دایرهٔ مثلثاتی و در ناحیهٔ چهارم قرار دارد. اگر θ زاویهٔ بین نیم خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{OX}$ باشد، حاصل $۲sin\theta+\sqrt{۳}\tan\theta$ را به دست آورید

حل) فرض کنیم $P(x,-\frac{۱}{۲})$ باشد. P در ناحیهٔ چهارم قرار دارد و در نتیجه x عددی مثبت است و داریم:

$$x^۲+y^۲=۱ \Rightarrow x^۲+(-\frac{۱}{۲})^۲=۱ \Rightarrow x^۲+\frac{۱}{۴}=۱$$

$$\Rightarrow x^۲=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\xrightarrow{x>۰} x=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow p\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)=(\cos\theta,\sin\theta)$$

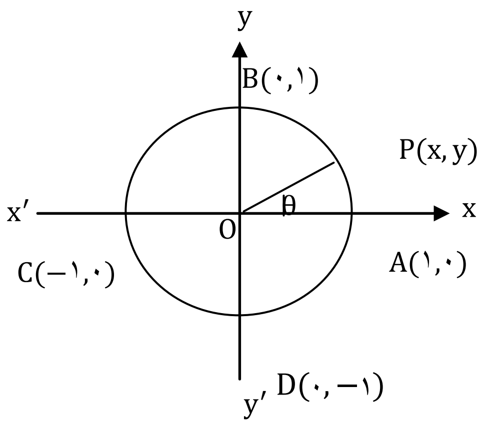
$$\Rightarrow sin\theta=-\frac{۱}{۲}, \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow ۲sin\theta+\sqrt{۳}\tan\theta=۲\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)+\sqrt{۳}\times\left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)=-۱-۱=-۲$$

تمرین: اگر t عددی حقیقی و $p(\frac{۳}{۵},-\frac{۴}{۵})$ نقطه ای روی دایره مثلثاتی و متناظر با t باشد، نسبتهای مثلثاتی آنرا بیابید.

مثال: الف) نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۰° را به دست آورید.

می دانیم در دایرهٔ مثلثاتی روبه رو، $sin\theta=y$ و $\cos\theta=x$. اگر $\theta=۰^\circ$، آنگاه نقطه P روی نقطهٔ A قرار می گیرد و داریم $\sin۰^\circ=۰$، همچنین $\cos۰^\circ=۱$ و $\tan۰^\circ=\frac{y}{x}=\frac{۰}{۱}=۰$، اما $\cot۰^\circ$ تعریف نمی شودزیرا $\cot۰^\circ=\frac{x}{y}=\frac{۱}{۰}$



ب) در دایرهٔ مثلثاتی بالا اگر $\theta=۹۰^\circ$، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

$$\sin۹۰^\circ \xrightarrow{\text{نقطه } O \text{ روی } B \text{ واقع است}} \sin۹۰^\circ=۱ \quad \cos۹۰^\circ=۰ \quad \tan۹۰^\circ=\frac{y}{x}=\frac{۱}{۰}= \text{تعریف نشده}$$

$$\cot ۹۰^\circ = \frac{x}{y} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

پ) اگر $\theta = ۱۸۰^\circ$، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

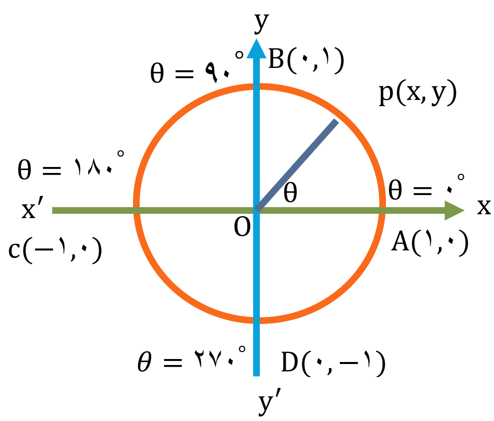
در ۱۸۰° نقطه P روی C واقع است پس

$\sin ۱۸۰^\circ = y = ۰$ $\quad \tan ۱۸۰^\circ = \frac{۰}{-۱} = ۰$ $\quad \cos ۱۸۰^\circ = x = -۱$ $\quad \cot ۱۸۰^\circ = \frac{x}{y} =$ تعریف نشده

ث) اگر $\theta = ۲۷۰^\circ$، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

$\sin ۲۷۰^\circ = y = -۱$ $\quad \tan ۲۷۰^\circ = \frac{y}{x} = -\frac{۱}{۰}$ تعریف نشده

$\cos ۲۷۰^\circ = x = ۰$ $\quad \cot ۲۷۰^\circ = \frac{x}{y} = \frac{۰}{-۱} = ۰$



با توجه به نتایج بالا جدول زیر را داریم:

مقدار	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	۱	۰	−۱	۰
$\cos\theta$	۱	۰	−۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

مثال : حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

آ) $sin۲۷۰^\circ - ۲cot۴۵^\circ - ۴cos۱۸۰^\circ$

ب) $cos۹۰^\circ + ۶\sqrt{۲}cos۴۵^\circ + tan۱۸۰^\circ - ۲cos۳۶۰^\circ$

پ) $\dfrac{\sqrt{۳}cot۳۰^\circ + sin۹۰^\circ}{۲cos۰^\circ - \sqrt{۳}tan۳۰^\circ}$

ت) $\dfrac{cot۲۷۰^\circ - ۴sin۲۷۰^\circ}{tan۰^\circ + ۶cos۱۸۰^\circ} + \dfrac{۱}{cos۱۸۰^\circ}$

ث) $\dfrac{cos۲۷۰^\circ sin۲۷^\circ + sin۹۰^\circ}{cos۱۲^\circ tan۱۸۰^\circ - (cos۱۸۰^\circ)^{-۳}}$

ج) $(cos۱۸۰^\circ + sin۹۰^\circ)(sin۲۵^\circ + cos۱۷^\circ)$

حل آ)

$$\sin ۲۷۰^\circ - ۲\cot ٤٥^\circ - ٤\cos ۱۸۰^\circ$$

$$= -۱ - ۲(۱) - ٤(-۱) = -۱ - ۲ + ٤ = ۱$$

ب)

$$cos۹۰^\circ + ۶\sqrt{۲}cos۴۵^\circ + tan۱۸۰^\circ - ۲cos۳۶۰^\circ$$

$$= ۰ + ٦\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۰ - ۲ \times ۱ = ٦ - ۲ = ٤$$

پ)

$$\frac{\sqrt{۳}cot۳۰^\circ + sin۹۰^\circ}{۲cos۰^\circ - \sqrt{۳}tan۳۰^\circ} = \frac{\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} + ۱}{۲(۱) - \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{۳ + ۱}{۲ - ۱} = ٤$$

ت)

$$\frac{cot۲۷۰^\circ - ٤sin۲۷۰^\circ}{\sin۰^\circ + ٦\cos۱۸۰^\circ} + \frac{۱}{\cos۱۸۰^\circ} = \frac{۰ - ٤(-۱)}{۰ + ٦(-۱)} + \frac{۱}{۱} = \frac{٤}{-٦} - ۱ = -\frac{۲}{۳} - ۱ = \frac{-٥}{۳}$$

ث)

$$(\cos۱۸۰^\circ)^{-۳} = (-۱)^{-۳} = \frac{۱}{(-۱)^۳} = \frac{۱}{-۱} = -۱$$

$$\cos۲۷۰^\circ = ۰ \Longrightarrow \cos۲۷۰^\circ \sin۲۷^\circ = ۰ \times \sin۲۷^\circ = ۰$$

$$\tan۱۸۰^\circ = ۰ \Longrightarrow \cos۱۲^\circ \tan۱۸۰^\circ = \cos۱۲^\circ \times ۰ = ۰$$

$$\Longrightarrow \frac{cos۲۷۰^\circ sin۲۷^\circ + sin۹۰^\circ}{cos۱۲^\circ tan۱۸۰^\circ - (cos۱۸۰^\circ)^{-۳}} = \frac{۰ + ۱}{۰ - (-۱)} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

ج)

$$\cos۱۸۰^\circ + \sin۹۰^\circ = -۱ + ۱ = ۰$$

$$\Longrightarrow (cos۱۸۰^\circ + sin۹۰^\circ)(sin۲۵^\circ + cos۱۷^\circ)$$

$$= ۰ \times (\sin۲٥^\circ + \cos۱۷^\circ) = ۰$$

مثال: اگر $۲۷۰^\circ > \alpha > ۹۰^\circ$ و $\cos\alpha = -۱$ باشد، حاصل $\sin۲\alpha + \tan\alpha + \cos۲\alpha$ را به دست آورید.

$$۹۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ, \cos\alpha = -۱ \Longrightarrow \alpha = ۱۸۰^\circ$$

$$\Longrightarrow sin۲\alpha + tan\alpha + cos۲\alpha = sin۳۶۰^\circ + tan۱۸۰^\circ + cos۳۶۰^\circ = ۰ + ۰ + ۱ = ۱$$

مثال : بیش ترین و کم ترین مقدار هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

آ) $۴sin\theta+۳$ ب) $-۵cos\theta+۷$

پ) $۲sin^۲\theta-۳$ ت) $|۱-۲sin\theta|$

حل) بیش ترین و کم ترین مقدار $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به ترتیب ۱ و ۱− می باشد.

آ)

$$-۱<sin\theta\le ۱ \xrightarrow{\times ٤} -٤\le ٤\sin\theta\le ٤ \xrightarrow{+۳} -۱\le ٤\sin\theta+۳\le ۷$$

بنابراین بیش ترین و کم ترین مقدار عبارت $۴sin\theta+۳$ به ترتیب ۷و ۱− می باشد.

ب)

$$-۱<cos\theta<۱ \xrightarrow{\times(-٥)} -٥\le -٥\cos\theta\le ٥ \xrightarrow{+۷} ۲\le -٥\cos\theta+۷\le ۱۲$$

بنابراین بیش ترین مقدار ۱۲ و کم ترین مقدار برابر ۲ می باشد.

پ)کم ترین مقدار $\sin^۲\theta$ برابر ۰ و بیش ترین مقدار آن برابر یک است:

$$۰<sin^۲\theta<۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰\le ۲\sin^۲\theta\le ۲ \xrightarrow{-۳} -۳\le ۲\sin^۲\theta-۳\le -۱$$

پس کم ترین مقدار عبارت $۲sin^۲\theta-۳$ برابر ۳− و بیش ترین مقدار آن برابر ۱− می باشد.

ت)

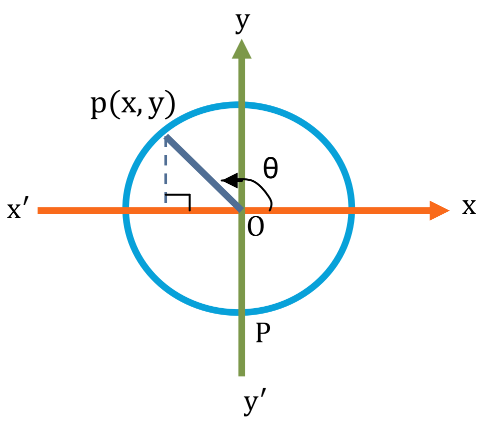
$$-۱<sin\theta<۱ \xrightarrow{\times(-۲)} -۲\le \sin\theta\le ۲$$

$$\xrightarrow{+۱} -۱\le ۱-۲\sin\theta\le ۳ \Rightarrow ۰\le |۱-۲\sin\theta|\le ۳$$

بنابراین:

۳=بیش ترین مقدار ، ۰=کم ترین مقدار

مثال : اگر θ زاویه ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin\theta = \frac{۵}{۷}$، سایر نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟



حل) می دانیم $\sin\theta = y = \frac{۵}{۷}$، بنابراین P نقطه ای به عرض $\frac{۵}{۷}$ است.

حالا طول نقطه P را به دست می آوریم

طبق رابطهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم الزاویه داریم: $x^۲ + y^۲ = ۱$. بنابراین $x^۲ + \frac{۲۵}{۴۹} = ۱$ و در نتیجه

$x^۲ = \frac{۲۴}{۴۹}$ پس $x = \pm\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$.

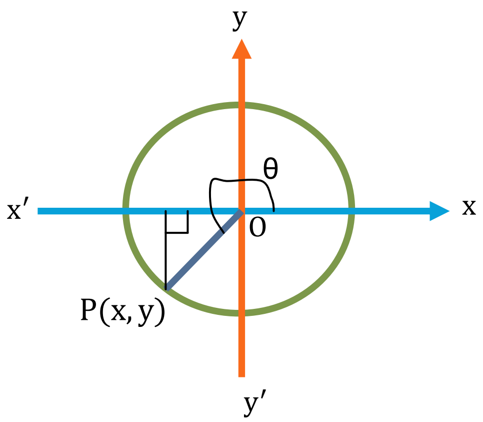
چون θ زاویه ای در ربع دوم است ، پس طول نقطهٔ P منفی است و از این رو $x = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$ قابل قبول است.

در نتیجه P نقطه ای به مختصات $(\frac{-۲\sqrt{۶}}{۷}, \frac{۵}{۷})$ است . بنابرین: $\cos\theta = x = \frac{-۲\sqrt{۶}}{۷}$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-۲\sqrt{۶}}{۵}, \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{۵}{-۲\sqrt{۶}},$$

نکته : اگر یکی از نسبت های مثلثاتی داده شده باشد، می توان سایر نسبت ها را از روی آن بدست آورد. با استفاده از قضیه ی فیثاغورس داریم: $x^۲ + y^۲ = ۱$، از طرفی $cos\theta = x , sin = y$ می باشد. حال با داشتن یکی از نسبت های sin یا $\cos$ و قرار دادن در این رابطه و با توجه به علامت نسبت ها در نواحی ۴ گانه می توان سایر نسبت ها را بدست آورد

مثال: فرض کنید نقطه p روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به طوری که $\cos\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ و θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، سایر نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟



$x^۲ + y^۲ = ۱ \Longrightarrow \rightarrow$

حل) می دانیم $\cos\theta = x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ بنابراین P نقطه ای به طول $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

حالا عرض نقطه P را به دست می آوریم

طبق رابطهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم الزاویه داریم: $x^۲ + y^۲ = ۱$. بنابراین $\frac{۱}{۲} + y^۲ = ۱$ و در نتیجه

$y^۲ = \frac{۱}{۲}$ پس $y = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

چون θ زاویه ای در ربع سوم است ، پس عرض نقطهٔ P منفی است و از این رو $y=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ قابل قبول است.

در نتیجه P نقطه ای به مختصات $\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$ است . بنابرین: $y=\sin\theta=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=۱\quad,\quad\cot\theta=\frac{x}{y}=۱$$

تمرین : در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه ای داده شده است. سایر نسبت های مثلثاتی را به دست آورید.

الف) $cos\alpha=\frac{۳}{۷}$ (α در ربع چهارم)

جواب

$$\tan\alpha=\frac{-\sqrt{۴۰}}{۳}\quad,\quad\cot\alpha=-\frac{۳}{\sqrt{۴۰}}\quad,\quad\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۴۰}}{۷}$$

ب) $sin\beta=-\frac{۱}{۲}$ (β در ربع سوم)

جواب

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\qquad\tan\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\qquad\cot\alpha=\sqrt{۳}$$

تمرین: اگر $\theta, cos\theta=\frac{۲}{۷}$ در ربع چهارم باشد، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه ی θ را بیابید.

تمرین: اگر α زاویه ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد بطوری که $sin\alpha=-\frac{۲}{۵}$ سایر نسبت های مثلثاتی زاویه ی α را بیابید.

درس پنجم :محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$ ،مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ یعنی $\left(k\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$و نسبت های مثلثاتی$k\frac{\pi}{۶}$ و$k\frac{\pi}{۴}$ و $k\frac{\pi}{۳}$

الف)محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$ یعنی $(\pi \pm \alpha)$ یا $(2\pi \pm \alpha)$ یا $(3\pi \pm \alpha)$ و ... (نقاط C و A).